TRATTATO ELEMENTARE

DI

TRIGONOMETRIA

RETTILINEA E SFERICA

ED APPLICAZIONE

DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA

DEL SIGNORE

S. F. LACROIX

Prima versione Italiana

RIVEDUTA E CORRETTA SULL' ULTIMA EDIZIONE DI PARIGI
DA C. Z.

NAPOLI,
LIBRERIA E TIPOGRAFIA SIMONIANA
Strada Quercia n°. 17.
1840.

TAVOLA

CAPITOLO I.

Della trigonometria rettilinea.

CAPITOLO II.

Della trigonometria sferica.

CAPITOLO III.

Dell' applicazione dell' algebra alla geometria.

APPENDICE

Contenente i primi principî dell' applicazione dell' algebra alle superficie curve ed alle curve a doppia curvatura.

Delle superficie di secondo grado. 246

Delle curve considerate nello spazio. *ivi*

FINE DELLA TAVOLA.

TRATTATO ELEMENTARE

DI

TRIGONOMETRIA

RETTILINEA E SFERICA

ED APPLICAZIONE

DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA.

CAPITOLO PRIMO

Della Trigonometria Rettilinea.

1. In un triangolo rettilineo vi sono sei cose da considerare, cioè, tre angoli e tre lati: ma bisogna conoscere un certo numero di queste diverse parti per determinarne le altre. Segue di fatti dalle proposizioni dimostrate relativamente ai triangoli eguali che si può sempre costruire un triangolo allorchè si conoscano tre delle sei cose, che lo costituiscono, e che fra le cose cognite vi si trovi almeno un lato. Affine di non lasciar nulla da desiderare sulla Teorica dei triangoli, fa di mestieri poter applicare il calcolo alle costruzioni geometriche, perchè l' esattezza di queste ultime è limitata dall' imperfezione degl' istrumenti, laddovecchè nulla arresta il calcolo, il quale siamo sempre padroni di spingere fino a quel grado di precisione che si voglia. Tale è l' oggetto, che ci proponghiamo nella *Trigonometria rettilinea.*

Quelli, i quali hanno intrapreso i primi a sviluppare mediante una serie di operazioni numeriche, o con delle formule algebriche le relazioni, che hanno tra loro le diverse parti d' un triangolo, han dovuto trovarsi arrestati dalla difficoltà di far entrare nel calcolo la grandezza degli angoli, i quali misurati da archi di circolo non pos-

sono esser paragonati con linee rette: ma dessi hanno ben presto riconosciuto che, se potevano con un mezzo qualunque calcolare una serie di triangoli, gli angoli de' quali avessero tutti i valori possibili, questa serie ne conterrebbe necessariamente uno, il quale sarebbe simile al triangolo, che si dovrebbe determinare, qualunque esso si fosse; cosicchè allora semplici proporzioni sarebber bastanti per dedurre le parti del secondo da quello del primo. L'esempio seguente schiarirà ciò, che queste nozioni possono contenere d'astratto.

Fig. 1. 2. Suppongo che nel triangolo ABC, *fig.* 1.ª, si conosca l'angolo B, l'angolo C, ed il lato BC; si cercherà nella serie dei triangoli calcolati quello, che ha due angoli b, e c respettivamente eguali agli angoli B, e C; desso sarà necessariamente simile al triangolo proposto ABC; e poichè tutte le sue parti ab, ac, bc son cognite, avremo le proporzioni

$$bc : ab :: \mathrm{BC} : \mathrm{AB}, \quad bc : ac :: \mathrm{BC} : \mathrm{AC},$$

in ciascuna delle quali i tre primi termini sono dati. Troveremò per conseguenza

$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{BC} \times ab}{bc}, \quad \mathrm{AC} = \frac{\mathrm{BC} \times ac}{bc};$$

e siccome si ha d'altronde $\mathrm{A} = a$, tutte le parti del triangolo ABC resteranno determinate.

3. Or che si scorge il partito, che può ricavarsi da una serie di triangoli fatti con tutti gli angoli possibili, ed i lati dei quali fossero di già calcolati, è natural di cercare i mezzi di formare una simil serie. Per considerare in primo luogo il caso più semplice, suppongo che i triangoli, che ci proponghiam di determinare, sieno rettangoli; è facil vedere che potrem costruirli tutti in un quarto di circolo abbassando da ciascuno dei punti dell'arco AB, *fig.* 2,
Fig. 2. delle perpendicolari MP, M′P′, M″P″, ec. sul raggio AC, e tirando i raggi MC, M′C, M″C, ec., i triangoli MPC, M′P′C, M″P″C, ec., così formati saranno rettangoli in P, P′, P″, ec., e gli angoli MCP, M′CP′, M″CP″, ec. avran successivamente tutti i valori possibili; finalmente gli angoli CMP, CM′P′, CM″P″, ec., i quali coi precedenti formano un angolo retto, saranno pur tali come l'esige la natura dei triangoli rettangoli; e non potranno esistere dei triangoli rettangoli, i quali non sieno equiangoli

con alcuno di quelli, che somministra la costruzione presente. È a proposito l'osservare che questi ultimi han tutti una medesima *ipotenusa*, eguale cioè al raggio dell'arco AB.

4. Potrebbesi altresì formare una serie di triangoli rettangoli, che avessero tutti uno dei lati dell'angolo retto eguale al raggio del circolo; basta per ciò alzar la tangente indefinita AT dall'estremità del raggio AC, e condurre per il centro C e pei punti M, M', M'', ec., le secanti CN, CN', CN'', ec. È evidente che i triangoli CAN, CAN', CAN'', ec. avran successivamente tutte le combinazioni d'angoli, i quali possono esistere in un triangolo rettangolo; e fra questi triangoli se ne troverà necessariamente uno simile a quel triangolo rettangolo, che vorremo.

5. Nei triangoli CPM, C P' M', C P'' M'', ec., l'*ipotenusa* dei quali non cangia, i lati PM, P' M', P'' M'', ec., i quali crescono nel medesimo tempo che crescono tanto gli angoli ACM, ACM', ACM'' ec. quanto gli archi AM, AM' AM'', ec., i quali misurano questi angoli, han ricevuto un nome a causa di questa lor dipendenza: la linea PM si chiama il *seno* dell'arco AM; la linea PM' è parimente il *seno* dell'arco AM'; e così delle altre. Segue da ciò che il *seno d'un arco è la perpendicolare abbassata da una dell' estremità di quest' arco sul raggio, che passa per l'altra estremità*. Le linee CP, CP', CP'', ec., le quali diminuiscono allorchè gli archi AM, AM', AM'', ec., aumentano, son respettivamente eguali, come paralelle comprese tra paralelle, alle perpendicolari MQ, M' Q', M'' Q'' ec., abbassate dai punti M, M', M'', ec., sul raggio CB, perpendicolare al raggio CA; ed è manifesto che le linee MQ, M'Q', M''Q'', ec. sono, per rapporto agli archi BM, BM', BM'', ec., ciò che sono PM, P' M', P'' M'', ec. per rapporto agli archi AM, AM', AM'', ec., e che in conseguenza MQ è il seno di BM, M' Q' quello di BM', M''Q'' quello di BM'', ec.

Due archi, i quali sommati insieme, o sottratti l'uno dall' altro danno il quarto della circonferenza, si dicono *complementi* l'uno dell'altro. Gli archi BM, BM', BM'', ec., son respettivamente i *complementi* di AM, AM', AM'', ec. Sono state denotate le linee rette MQ, M' Q', M''Q'', ec., come pure le loro eguali CP, CP', CP'', ec., sotto il nome di *coseni* degli archi AM, AM', AM'', ec. Dietro queste nozioni *il coseno d'un arco qualunque è il seno del complemento di quest' arco, ed è eguale alla parte del raggio compresa tra il centro, ed il piede del seno.*

I triangoli rettangoli CPM, CP′M′, CP″M″ ec., i quali hanno tutti una medesima *ipotenusa*, son dunque formati dal raggio del circolo, e dal seno, e dal conseno di quello dei loro angoli acuti, che ha il suo vertice al centro (*).

6. Passo ai triangoli CAN, CAN′, CAN″, ec. ec.; le loro *ipotenuse* son le *secanti* degli archi AM, AM′, AM″, ec., perchè *si chiama secante d'un arco il raggio condotto da una dell'estremità di quest'arco, e prolungato fino all'incontro della tangente condotta per l'altra estremità.* Le porzioni AN, AN′, AN″, ec., prese sulla *tangente* AT, son le *tangenti* degli archi AM, AM′, AM″, ec., perchè si è convenuto di chiamar *tangente d'un arco la parte, che intercettano sulla tangente indefinita condotta da una estremità di quest'arco i due raggi, che lo determinano* (**).

Fig. 3. 7. Se per l'estremità B dell'arco AB, *fig.* 3, si conduca la tangente B*n* prolungata fino a che dessa incontri la secante CN, la linea C*n* è la secante dell'arco BM *complemento* di AM, e si chiama la *cosecante* di AM; la linea B*n* tangente di BM è la *cotangente* di AM, perchè si chiamano *cotangente*, *e cosecante d'un arco*, *la tangente*, *e la secante del suo complemento.* La *cotangente*, e la *cosecante*, come si vede, non fanno parte de' medesimi triangoli, come pur la *tangente*, e la *secante*; cosa che all'incontro succede pel *seno* e *coseno.*

8. Le *tangenti*, e le *secanti* hanno coi *seni*, e i *coseni* delle relazioni semplicissime, col mezzo delle quali si possono trovar l'une allorchè son cogniti gli altri. I triangoli CPM, e CAN essendo simili danno CP : PM :: CA : AN,

---

(*) *La parte AP del raggio AC compresa tra il piede del seno, e l'estremità dell'arco, si chiama* seno verso. *Questa linea non è però d'alcun uso nella Trigonometria.*

(**) *Si vedon qui le parole* secante, *e* tangente *prese in un senso differente da quello, che loro abbiam dato negli* Elementi di Geometria. *In questa parte delle Matematiche la secante, e la tangente son rette indefinite, una delle quali taglia il circolo, e l'altra lo tocca; ma in* Trigonometria *le medesime denominazioni si applican sempre a linee d'una grandezza determinata: quando vi può esser equivoco, si chiaman quest'ultime* secanti, *e* tangenti trigonometriche.

d'onde ricavasi $AN = \frac{PM \times CA}{CP}$; ponendo in luogo delle linee CP, PM, e AN le loro designazioni, cioè cos AM, sen AM, e tang AM, e rappresentando il raggio CA per R, avremo $\text{tang } AM = \frac{R \text{ sen } AM}{\cos AM}$.

Dai medesimi triangoli CPM, e CAN deducesi pure CP : CM :: CA : CN, il che conduce a $CN = \frac{CM \times CA}{CP}$; ma CN=sec AM, CM = CA = R, CP = cos AM; dunque $\sec AM = \frac{R^2}{\cos AM}$.

9. Se si paragonan tra loro i triangoli CAN, e CB*n*, i quali pure son simili, poichè son essi ambedue rettangoli, e l'angolo ACN = C*n*B, come *alterni-interni* rispetto alla *secante* C*n*, avremo la proporzione

AN : CA :: CB o sivvero CA : B*n*,

la qual somministra

$Bn = \frac{\overline{CA}^2}{AN}$; ciò che riducesi a $\cot AM = \frac{R^2}{\text{tang } AM}$.

Questa proporzione e quella, ch'è stata trovata per la *secante*, fan vedere che il *raggio è medio proporzionale tra la secante*, *e il coseno*, *tra la tangente*, *e la cotangente*, poichè si ha

$\cos AM \times \sec AM = R^2$, $\text{tang } AM \times \cot AM = R^2$.

10. A tutto ciò, che precede, altro non manca, per essere in istato di costruire le *Tavole* necessarie alla Trigonometria, se non che di conoscere i mezzi di calcolar solamente i *seni*, e i *coseni*. Il *coseno* pur si deduce immediatamente dal *seno*, poichè il triangolo rettangolo CPM, il quale contiene l'uno e l'altro, ed ha per ipotenusa il raggio somministra,

$\overline{PM}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{CM}^2$, ovvero $(\text{sen } AM)^2 + (\cos AM)^2 = R^2$,

e vale a dire, che *il quadrato del raggio è eguale alla somma deï quadrati del seno*, *e del coseno*; dal che ne segue

$$\cos AM = \sqrt{R^2 - (\text{sen } AM)^2}.$$

La proposizione seguente, la quale dà l' espressione del *seno*, e del *coseno* della somma, o della differenza di due archi, merita la più grande attenzione, perchè dessa contiene implicitamente tutte le proprietà dei *seni*, e dei *coseni*.

11. *Sieno due archi qualunque* a, *e* b; *avremo*

$$\textit{sen}\,(a \pm b) = \frac{\textit{sen}\, a \,\textit{cos}\, b \pm \textit{sen}\, b \,\textit{cos}\, a}{R},$$

$$\textit{cos}\,(a \pm b) = \frac{\textit{cos}\, a \,\textit{cos}\, b \mp \textit{sen}\, a \,\textit{sen}\, b}{R}.$$

Fig. 4. Per dimostrar ciò, prendo sul circolo AMB, *fig.* 4, l'arco AM $= a$; porto da ciascun lato del punto M gli archi MN, e MN', eguali a b; tiro la corda NN'; dai punti N, M, N', abbasso sul raggio AC le perpendicolari NQ, MP, N'Q'; per il punto M conduco il raggio MC, e dal punto E, dove desso incontra la corda NN', abbasso sopra AC la perpendicolare EF; pei punti E, e N' conduco le rette ED, N'G paralelle ad AC.

Ciò fatto osservo 1.° che NQ è il *seno* dell'arco AN $=$ AM $+$ MN $= a + b$, e che CQ è il *coseno* dell'arco medesimo; 2.° che N'Q' è il *seno* dell' arco AN' $=$ AM $-$ MN' $= a - b$, e che CQ' n'è il *coseno*. Ma la corda NN' essendo necessariamente divisa in due parti eguali nel punto E, poichè il raggio CM passa per il mezzo dell' arco NN' secondo la costruzione, segue dalla similitudine evidente dei triangoli NED, NN'G che NG è pur divisa in due parti eguali nel punto D, e che DN $=$ DG. Di più DQ $=$ EF, GQ $=$ N'Q', DE $=$ FQ, a motivo delle paralelle; e perchè DE è la metà di N'G, FQ sarà la metà di Q'Q; di maniera che Q'F $=$ QF $=$ DE. Finalmente

$$\begin{aligned} NQ &= DQ + DN = EF + DN, \\ N'Q' &= GQ = DQ - DG = EF - DN, \\ CQ &= CF - FQ = CF - DE, \\ CQ' &= CF + FQ' = CF + DE; \end{aligned}$$

ponendo per NQ, N'Q', CQ, CQ' le loro designazioni respettive, cioè,

sen $(a+b)$, sen $(a-b)$, cos $(a+b)$, cos $(a-b)$, avrò
sen $(a+b) =$ EF $+$ DN, cos $(a+b) =$ CF $-$ DE,
sen $(a-b) =$ EF $-$ DN, cos $(a-b) =$ CF $+$ DE.

Altro non resta che a calcolare le quattro linee EF, CF, DN, DE; le due prime s'ottengono dai triangoli simili CMP, e CEF, dai quali ricavasi

$$CM : PM :: CE : EF, \quad CM : CP :: CE : CF.$$

Ora, poichè AM $= a$, ho PM $=$ sen a, CP $=$ cos a; segue pure dalle definizioni del *seno*, e del *coseno* (5) che EN è il *seno* dell'arco MN, che CE n'è il *coseno*, e che in conseguenza EN $=$ sen b, CE $=$ cos b; d'altronde CM $=$ R; sostituendo questi valori nelle proporzioni di sopra, trovo

$$EF = \frac{PM \times CE}{CM} = \frac{\text{sen}\, a \cos b}{R},$$

$$CF = \frac{CP \times CE}{CM} = \frac{\cos a \cos b}{R}.$$

Paragonando in seguito i triangoli CMP, DEN, i quali son simili perchè i lati del secondo son perpendicolari a quelli del primo, e deduco da questi triangoli

$$CM : EN :: CP : DN, \quad CM : EN :: PM : DE.$$

Sostituendo ai tre primi termini di ciascuna di queste proporzioni le loro designazioni riportate qui sopra, desse daranno

$$DN = \frac{EN \times CP}{CM} = \frac{\text{sen}\, b \cos a}{R},$$

$$DE = \frac{PM \times EN}{CM} = \frac{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}{R},$$

Riunendo questi valori ai precedenti per formar quelli di sen $(a + b)$, e di sen $(a - b)$, si ottengono le quattro equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} \text{sen}\,(a+b) = \dfrac{\text{sen}\, a \cos b + \text{sen}\, b \cos a}{R}, \\[2ex] \text{sen}\,(a-b) = \dfrac{\text{sen}\, a \cos b - \text{sen}\, b \cos a}{R}, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\,(a+b) = \dfrac{\cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}{R}, \\[2ex] \cos\,(a-b) = \dfrac{\cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}{R}, \end{array}\right.$$

le quali riduconsi alle sole due, che compongono l'enunciato della proposizione.

Mediante queste equazioni si posson trovare il *seno*, e il *coseno* d'un arco doppio, triplo, ed in generale multiplo di quello, di cui si conoscano il *seno*, e il *coseno*. Infatti, se si prenda successivamente $b = a$, $b = 2a$, avremo

$$\begin{cases} \text{sen } 2a = \dfrac{2 \text{ sen } a \cos a}{R}, \\ \cos 2a = \dfrac{\cos a^2 - \text{sen } a^2}{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{sen } 3a = \dfrac{\text{sen } a \cos 2a + \text{sen } 2a \cos a}{R}, \\ \cos 3a = \dfrac{\cos a \cos 2a - \text{sen } a \text{ sen } 2a}{R}, \end{cases}$$

e ricaveremo dalle due ultime equazioni sen $3a$, e cos $3a$, allorchè sen $2a$, e cos $2a$ saran calcolati.

12. L'equazione $\text{sen } 2a = \dfrac{2 \text{ sen } a \cos a}{R}$ conduce ancora dal *seno* d'un arco a all'espressione del *seno* della sua metà. Se sostituiscasi per cos a il suo valore $\sqrt{R^2 - \text{sen } a^2}$ (*), s'ottiene allora

$$\text{sen } 2a = \frac{2 \text{ sen } a \sqrt{R^2 - \text{sen } a^2}}{R},$$

ed inalzando al quadrato, si trova

$$R^2 \text{ sen } 2a^2 = 4 R^2 \text{ sen } a^2 - 4 \text{ sen } a^4;$$

prendendo sen a per l'incognita in quest'equazione, la qual può risolversi come quelle di secondo grado, s'ottiene

$$\text{sen } a = \pm \sqrt{\frac{1}{2} R^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - \text{sen } 2a^2}}.$$

(*) *Si previene il Lettore che d'ora in avanti denoterò il quadrato del seno dell'arco* a *per sen* a^2*; espressione, che non bisogna prendere per il seno del quadrato dell'arco* a, *così sen* $a^2 = ($ *sen* $a)^2$.

Se si faccia $2a = a'$, avremo $a = \frac{1}{2}a'$, ed in conseguenza

$$\text{sen}\frac{1}{2}a' = \pm\sqrt{\frac{1}{2}R^2 \pm \frac{1}{2}R\sqrt{R^2 - \text{sen}\,a'^2}},$$

ovvero

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}a' = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 \pm 2R\cos a'},$$

ponendo $\cos a'^2$ in luogo di $R^2 - \text{sen}\,a'^2$ (10), moltiplicando le quantità sotto il radicale per 4, e dividendo al di fuori per 2, il che non porta alcun cangiamento all' espressione. Tal è la formula, che dà il *seno* della metà d' un arco allorchè si ha quel di quest' arco.

13. Si può giungere a tal resultato mediante una semplicissima costruzione.

Se dividasi l' arco AM, *fig.* 5, in due parti eguali, la corda AQM si troverà egualmente divisa in due parti eguali, e QM sarà il *seno* di MN, ovvero della metà di AM; il triangolo AMP, rettangolo in P, darà Fig. 5.

$$AM = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{AP}^2};$$

e siccome $AP = AC - CP = R - \cos AM = R - \cos a'$, e d' altronde $PM = \text{sen}\,AM = \text{sen}\,a'$, avremo

$$AM = \sqrt{\text{sen}\,a'^2 + R^2 - 2R\cos a' + \cos a'^2} = \sqrt{2R^2 - 2R\cos a'},$$

a motivo che $\text{sen}\,a'^2 + \cos a'^2 = R^2$ (10); e ne dedurremo

$$QM = \frac{1}{2}AQM = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\cos a'}.$$

Non si trova in questa maniera che il secondo valore di $\text{sen}\,\frac{1}{2}a'$; l' altro è MQ'; poichè l' arco MN'A', il quale compone con l' arco AM la mezza-circonferenza, ha pure per seno PM, poichè questa retta è infatti la perpendicolare abbassata dall' estremità M sul raggio CA', il quale passa per l' altra estremità (5); e siccome nell' equazione, dalla quale siamo partiti, nulla ci fa conoscere quale di questi due archi ci proponghiam di dividere, dobbiam trovare nel tempo medesimo tanto il seno della metà del primo che quello della metà del secondo. Seguendo la costruzione, avrebbesi

$$A'M = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{A'P}^2} = \sqrt{\overline{PM}^2 + (A'C + CP)^2}$$
$$= \sqrt{\text{sen}\, a'^2 + (R + \cos a')^2}$$
$$= \sqrt{\text{sen}\, a'^2 + R^2 + 2R\cos a' + \cos a'^2}$$
$$= \sqrt{2R^2 + 2R\cos a'},$$

ed in conseguenza

$$MQ' = \text{sen}\,\frac{1}{2}\,a' = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R\cos a'}\,;$$

resultato, il qual' è il primo valore di sen $\frac{1}{2}$ a'. Fa di mestieri osservare che, benchè sen a', sia lo stesso nei due valori di sen $\frac{1}{2}$ a', l'arco a' è differente: per uno di essi l'arco è AM, e per l'altro A'M, ch'è il *supplemento* di AM, poichè *s'intende per* supplemento *d'un angolo*, *o d'un arco quel che bisogna aggiungere a quest' angolo o a quest' arco per farne due retti*, *o la mezza-circonferenza.* Concluderemo pure da ciò che precede, che il *seno* del *supplemento* d'un arco è lo stesso che quel di quest' arco. Darò in seguito delle nozioni generali sui differenti archi, i quali possono avere un medesimo *seno*, una medesima *tangente* ec.

14. Segue da ciò che precede, che il *seno* d'un arco qualunque AN è la metà della corda AM dell' arco doppio ANM, e che la corda AM è il doppio del seno dell' arco AN metà di ANM; di manierachè, allorquando i seni son cogniti, se ne deducon le corde, e vice-versa.

15. Non sono i valori assoluti dei *seni*, che si ha bisogno di calcolare, ma solamente i loro rapporti col raggio, poichè uopo è conoscere in tutti i triangoli CPM, CP'M' ec., Fig. 2. *fig.* 2, i rapporti che i lati hanno tra loro. Possiamo in conseguenza, per maggiore semplicità, prendere il *raggio* come unità, ed esprimere i *seni*, PM, P'M', ec., in parti decimali di quest' unità, oppure, com'è stato praticato altre volte, suppor questo raggio diviso in 100 000 parti.

16. E' a proposito l' osservare che la lunghezza d'un arco è sempre minore di quella della sua *tangente*, e maggiore di quella del suo *seno*. Infatti, se si prenda al disotto

del raggio AC, *fig.* 6, l'arco AM' = AM, si tiri la corda MM', e si conducano le tangenti MT, M'T, è facil vedere che queste tangenti debbon incontrare ambedue il raggio AC in un medesimo punto, poichè i triangoli CMT, e CM'T sono eguali. Le linee MT, e M'T essendo eguali nello stesso modo che le linee PM, e PM', e gli archi AM, ed AM', avremo 2AM < 2MT, e 2AM > 2PM, perchè la lunghezza d'un arco di circolo è compresa tra quelle porzioni corrispondenti dei poligoni inscritto, e circoscritto (*Geom.* 151.) (*); e ne concluderemo AM < MT, AM > PM. Fig. 6.

Farò osservare a questo proposito che il rapporto tra la *tangente*, ed il *seno* d'un arco tende sempre più ad avvicinarsi all'unità a misura che l'arco diminuisca: infatti da

$$\text{tang}\, a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \text{ ricavasi } \frac{\text{sen}\, a}{\text{tang}\, a} = \cos a\text{ ; e siccome } \cos a \text{ si}$$

approssima sempre più all'unità, ne segue che la *tangente*, ed il *seno* si approssiman parimente sempre più all'eguaglianza, perchè il *limite* (*Alg.* 234) del loro rapporto è l'unità.

17. Segue evidentemente da ciò che, se il valore della *tangente*, e quello del *seno* d'un piccol arco AM, non differiscon punto in un certo numero delle lor prime cifre, queste medesime prime cifre daranno pure un valore approssimativo dell'arco. Prendendo, per esempio, PM = 0,000 1, si trova

---

(*) *La proposizione rammentata di sopra è un caso particolar di quest'altra :* Le linee che sono per tutto convesse nel medesimo senso, son tanto più lunghe quanto desse si allontanan dipiù dalla linea retta. *Infatti, se si conduca alla linea curva ACB, fig. 7, interna rispetto alla curva AMB, una tangente DE, questa tangente sarà minore dell'arco DME, ed avremo ADEB < AMB. Tirando in seguito pei punti H e L intermedî tra A e C, C e B, le tangenti FG, IK, formeremo una nuova linea spezzata AFGIKB, la quale sarà minor della prima, poichè FG < FD + DG, IK < IE + EK. E' manifesto che si costruirà nella stessa maniera una serie indefinita di linee spezzate, le quali anderanno sempre diminuendo a misura che desse si approssimeranno a confondersi con la curva ACB, la quale sarà non solamente minore di AMB, ma ancora di tutte le linee spezzate, di cui abbiamo parlato.* Fig. 7.

$$CP = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{PM}^2} = 0,999\,999\,995\,,$$

$$e\ MT = \frac{CM \times PM}{CP} = 0,000\,100\,000\,000\,5\,;$$

valore, il quale non differisce da PM che alla tredicesima cifra; si può dunque prendere questo numero per il valore dell' arco AM espresso in parti del raggio (*).

18. Per applicare le formule dei numeri 12, 11, e 10, bisogna conoscere almeno il *seno* d'uno degli archi compresi nel quarto di circolo, ora vi son due di questi archi, di cui il *seno* è facilmente cognito, cioè, il quadrante e il suo terzo. Infatti, *il seno del quadrante non è altra cosa che il raggio, ed il seno del terzo di quest' arco è eguale alla metà del raggio.*

Fig. 2. Il primo di questi valori è evidente dallá *fig.* 2, ed il secondo resulta da ciò che il lato dell' esagono regolare inscritto, ovvero, ch' è lo stesso, la corda dei $\frac{2}{3}$ del qua-

---

(*) *La medesima cosa dimostrasi riducendo in* serie *l' espressione della* tangente. *Infatti si ha*

$$tang\ a = \frac{sen\ a}{cos\ a} = \frac{sen\ a}{\sqrt{1 - sen\ a^2}} (8,10);\ ma\ \frac{sen\ a}{\sqrt{1 - sen\ a^2}} = \ldots$$

$sen\ a\,(1 - sen\ a^2)^{-\frac{1}{2}}$; *sviluppando l' ultima quantità mediante la formula del binomio troveremo*

$$tang\ a = sen\ a + \frac{1}{2}\,sen\ a^3 + \frac{3}{8}\,sen\ a^5 + ec.$$

E' manifesto che fino a tanto che sen a *sarà una piccola frazione decimale il termine* $\frac{1}{2}$ *sen* a^3 *non potrà influire che sulle ultime cifre dell' espressione di tang* a, *e che nelle prime avremo tang* a = *sen* a.

Per sen a = 0,0001, *si ha* $\frac{1}{2}$ *sen* a^3 = 0,000 000 000 000 5;

resultato, che non può cangiare se non che la tredicesima cifra.

drante, *fig.* 9., è eguale al raggio (*Geom.* 146.); la metà Fig. 9.
di questa corda sarà dunque il seno del terzo del quadrante (14).

Partendo dal quadrante intero, la formula

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,a' = \frac{1}{2}\,\sqrt{2R^2 - 2R\cos a'}$$

somministra il *seno* della metà, poi quello della metà di questa metà, o sivvero del quarto del quadrante, e conduce a tutte le frazioni comprese nella serie.

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \text{ec.}$$

La medesima formula, allorchè si parte dal terzo del quadrante, determina successivamente i *seni* delle frazioni.

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{48},\ \frac{1}{96},\ \text{ec.}$$

di quest' arco.

Si fa manifesto da ciò che, se detto quadrante fosse stato diviso in un numero di parti eguali ad alcuno dei denominatori delle frazioni suddivisate, troverebbonsi direttamente i *seni* di ciascuna delle sue parti, e se ne formerebbe una *Tavola* scrivendoli di fronte agli archi, ai quali dessi appartengono; ma la cosa non va così; i soli Astronomi Indiani sembra che abbian diviso il quadrante in 24 parti per calcolarne i seni. Un uso antichissimo, ed altre ragioni in seguito hanno fatto adottare delle divisioni differenti dalle progressioni stabilite qui sopra.

19. Si divideva per il passato la circonferenza intera in 360 parti, che si chiamavano *gradi*; si suddivideva in seguito ciascun di questi *gradi* in 60 parti chiamate *minuti*; ciascun di questi *minuti* in 60 parti chiamate *secondi*, ciascun di questi *secondi* in 60 parti chiamate *terzi*, ec.: il segno dei *gradi* è il carattere posto alla destra del numero, ed al disopra; quello dei *minuti*$'$, quello dei *secondi*$''$, quello dei *terzi*$'''$, ec.; di maniera che $42^\circ\ 31'\ 14''\ 5'''$ significa 42 gradi, 31 minuti, 14 secondi, e 5 terzi.

Poichè nella misura degli angoli non si ha alcun riguardo al valore assoluto degli archi, ma solamente al loro rapporto con la circonferenza intera, sembrerebbe assai naturale di prender la detta circonferenza per unità, e d'es-

primere gli archi per mezzo di frazioni tanto decimali che di qualunque altra specie. Frattanto alcune considerazioni particolari hanno determinato i Dotti incaricati della riforma dei Pesi e Misure a prender l'angolo retto per l'unità degli angoli, ed in conseguenza il quarto del circolo, o *quadrante* per l'unità degli archi. Dessi lo han diviso in 100 parti eguali, che hanno chiamate *gradi*, e che hanno sostituiti agli antichi *gradi*; poi ciascuno di questi gradi in cento parti eguali. Queste ultime divisioni rimpiazzano i *minuti*, i quali possono essere suddivisi tanto quanto vorremo, seguendo la progression decimale.

Impiegando nel corso di quest' Opera la nuova divisione del circolo, esprimerò gli archi con dei numeri decimali scritti secondo l'uso ordinario; ma io porrò al disopra della cifra delle unità, ed alla destra la lettera q, per denotare che l'unità è il quarto di circolo, e per impedir che non si confondano le misure d'archi con gli altri numeri; $0^q,435$, per esempio, rappresenterà l'arco eguale a $\frac{435}{1000}$, ovvero $\frac{4350}{10000}$ del quadrante, e sarà in conseguenza composto di 43 gradi, e 50 minuti (*).

20. Il raggio del circolo, sul quale ci proponghiamo di costruir le *Tavole*, essendo 1, e la sua circonferenza essendo denotata ordinariamente da 2π, il *seno* di AB, *fig.* 9,
Fig. 9.
ovvero $\text{sen}\,\frac{1}{2}\pi = 1$; si ha d'altronde $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$: facendo dunque $a' = \frac{1}{2}\pi$, la formula

$\text{sen}\,\frac{1}{2}a' = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\cos a'}$ (13) fa vedere che il *seno*

(*) *Sembra che le principali ragioni, che han fatto scegliere l'angolo retto per unità, sieno* 1.° *che il circolo intero, a parlar propriamente, non misura un angolo, poichè in tal caso il raggio mobile CM*, fig. 2, *è ritornato ad applicarsi sul raggio CA*; 2.° *che il seno, al qual si rapportano tutte le altre linee trigonometriche, prende nell' estensione del quarto di circolo, ovvero dell' angolo retto, tutti i valori, di cui è suscettibile.*
Fig. 2.

della metà del quadrante ovvero di $\frac{1}{2}\pi$ è $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (*).

L'arco AB $= \frac{1}{2}\pi$ essendo preso per unità, AM sarà di $0^q, 5$; avremo dunque

$$\text{sen } 0^q, 5 = \cos 0^q, 5 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707106781186.$$

Adesso, se si faccia $0^q, 5 = a'$, troveremo

$$\text{sen } \frac{1}{2}a' = \text{sen } 0^q, 25 = 0, 382683432365,$$

$$\cos \frac{1}{2}a' = \cos 0^q, 25 = 0, 923879532511,$$

ma continuando in tal maniera a dividere ciascun arco in due parti eguali, non caderemo sopra alcuna delle parti decimali del quadrante; arriverem solamente a degli archi di più in più piccoli, e che per questa ragione si approssimeranno quanto mai si voglia ad essere eguali ai lor *seni* (17). Alla quattordicesima divisione, per esempio, si arriva ad un arco, il quale non è che $\frac{1}{16384}$ del quadrante, e il di cui *seno* è 0,000 095 873 799, minore per conseguenza che 0,0001; la piccolezza di quest'arco è dunque tale che desso non differirà dal suo *seno* nelle 12 prime cifre decimali.

A più forte ragione sarà lo stesso per gli archi minori; ora è manifesto che tutti gli archi, i quali si confondono coi loro seni, e con le loro tangenti, sono proporzionali a queste linee: avremo dunque

---

(*) *Possiamo pure convincercene* a priori, *poichè il triangolo CMP*, fig. 6, *è allora isoscele*, *e si ha in conseguenza* Fig. 6.

$$2\overline{PM}^2 = \overline{CM}^2 = 1,$$

di dove

$$\overline{PM}^2 = \frac{1}{2} \text{ e } PM = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{sen}\,\frac{1^{\text{q}}}{16384} : \text{sen}\,\frac{1^{\text{q}}}{100000} :: \frac{1^{\text{q}}}{16384} : \frac{1^{\text{q}}}{100000}$$

ovvero $:: 100000 : 16384$,

di dove

$$\text{sen}\,0^{\text{q}},00001 = \frac{16384\,\text{sen}\,\frac{1^{\text{q}}}{16384}}{100000} = 0,000015707963,$$

almeno nelle dodici prime cifre decimali. Si troverà per la stessa ragione

$$\begin{aligned}\text{sen}\,0^{\text{q}},00002 &= 2\,\text{sen}\,0^{\text{q}},00001\\ \text{sen}\,0^{\text{q}},00003 &= 3\,\text{sen}\,0^{\text{q}},00001\\ \text{sen}\,0^{\text{q}},00004 &= 4\,\text{sen}\,0^{\text{q}},00001,\ \text{ec.}\end{aligned}$$

Avendo cura di calcolare nel medesimo tempo il *coseno*, e la *tangente* di ciascuno di questi archi, vedremo che si può seguir questa via fino all' arco, il cui *seno*, e la *tangente* si confondon pure nelle dodici prime cifre decimali.

Mentre non si volessero avere i valori approssimativi se non che fino all' ottava decimale, potrebbesi proseguire allora fino all' arco di $0^{\text{q}},001$.

Per elevarsi in seguito ad archi maggiori ci serviremo dell' equazioni

$$\begin{aligned}\text{sen}\,2a &= 2\,\text{sen}\,a\cos a\\ \cos 2a &= \cos a^2 - \text{sen}\,a^2\\ \text{sen}\,(a \pm b) &= \text{sen}\,a\cos b \pm \text{sen}\,b\cos a\\ \cos\,(a \pm b) &= \cos a\cos b \mp \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b\,;\end{aligned}$$

facendo successivamente $a = 0^{\text{q}},001$, $a = 0^{\text{q}},002$, ec. nelle due prime, ne dedurremo
sen $0^{\text{q}},002$, cos $0^{\text{q}},002$, sen $0^{\text{q}},004$, cos $0^{\text{q}},004$, ec.; e prendendo in seguito $a = 0^{\text{q}},001$, $b = 0^{\text{q}},002$, $a = 0^{\text{q}},002$, $b = 0^{\text{q}},003$, ec., otterremo col mezzo delle due ultime

sen $0^{\text{q}},003$, cos $0^{\text{q}},003$, sen $0^{\text{q}},005$, cos $0^{\text{q}},005$, ec.

Ciò, che abbiamo esposto, serve per far comprendere come si possan formare le *Tavole trigonometriche.* Esiston d' altronde dei metodi più speditivi per calcolare i *seni* degli archi qualunque col mezzo di serie convergenti, le quali deduconsi dall' equazioni del num.° 11. Si troveran queste serie nell' *Introduzione* del mio *Trattato del Calcolo differenziale, e del Calcolo integrale.*

21. Per facilitare i calcoli si sono sostituiti fin da gran tempo ai valori dei *seni*, *coseni*, *tangenti*, e *cotangenti* i lor logaritmi; e nella maggior parte delle *Tavole* altro non trovasi se non che questi ultimi; di modo che, col lor mezzo, si risolve sempre l'uno o l'altro di questi Problemi.

1.° *Essendo dato un arco, trovare il logaritmo del suo seno, ovvero quello del suo coseno, oppure quello della sua tangente, o quello della sua cotangente.*

2.° *Conoscendo il logaritmo del seno, ovvero quello del coseno, oppur quello della tangente, o quel della cotangente d'un arco, trovare quest' arco.*

La soluzione di questi Problemi dipende dalla disposizion delle *Tavole*; disposizione, la quale non è la stessa in tutte, e che trovasi sempre spiegata in fronte di ciascuna di esse. Ecco perchè non ne farò qui menzione. Mi limiterò ad indicare le *Tavole* di *Callet*, come le migliori relativamente all'antica divisione, e quelle di *Borda*, ovvero quelle dei Sigg. *Hobert* e *Ideler*, per rapporto alla nuova.

Le *Tavole Trigonometriche* non abbracciano che l'estensione del quarto di circolo; ma desse danno, malgrado ciò, i *seni*, e i *coseni*, le *tangenti*, e le *cotangenti* per tutti gli archi, comunque grandi essi sieno, come io lo farò vedere esaminando l'andamento delle linee trigonometriche rispetto ai diversi gradi di grandezza, pei quali può passare un arco di circolo.

22. Per ben comprendere ciò che viene in appresso, bisogna ben concepire la *legge di continuità*, che regna sempre tra i differenti resultati che si deducono da una medesima espressione algebrica, oppure da una medesima costruzione geometrica, la quale consiste in ciò che ciascun valore, che prende l'espressione, di cui si tratta, è sempre preceduto, o seguito da valori, i quali differiscono tanto poco quanto si voglia dal primo, ed in ciò che nella descrizion d'una linea ciascun punto è sempre preceduto, o seguito da punti, i quali gli sono immediatamente contigui. Ciò posto, se si concepisce che il raggio MC, *fig.* 10, Fig. 10.
in primo luogo soprapposto ad AC, giri intorno al punto C come su d'una cerniera, questo raggio formerà successivamente con AC tutti gli angoli possibili; ed il punto M, situato alla sua estremità, passerà per tutti i punti della circonferenza del circolo ABA' B'A, ovvero, ch'è lo stesso, la descriverà. Seguendo con attenzione il movimento, che ho indicato, si vede in primo luogo che nel punto A,

ove l'arco è nullo, il *seno* è parimente nullo, ed il *coseno* non differisce dal *raggio* AC. Allorchè il *raggio* CM si è distaccato da AC, il seno PM aumenta a misura che il punto M, che d'ora in avanti chiamerò il *punto descrivente*, s'avanza verso B; e quando vi è pervenuto, PM diviene eguale a CB, o sivvero al *raggio*. Nelle medesime circostanze il *coseno* PC va sempre diminuendo, e divien nullo allorchè il punto M è in B; l'angolo ACB è allora retto, e l'arco $AB = \frac{1}{2}\pi$. Il punto M continuando nel suo movimento al di là del punto B, il *seno* decresce, ed il *coseno*, il quale adesso cade sul diametro AA', da un lato del punto C opposto a quello dove esso era prima del punto B, aumenta. Ciò è dimostrato dalla sola ispezione della *figura*; P'M', *seno* di ABM', è minor di BC *seno* di AB; e CP', *coseno* del primo di questi archi, sorpassa il *coseno* del secondo, il quale è nullo. È a proposito d'osservare che P'M' e CP' son respettivamente il *seno*, e il *coseno* dell'arco A'M', contato dal punto A', e *supplemento* di ABM'; dal che ne segue che *un angolo ottuso ha il medesimo seno, ed il medesimo coseno che il suo supplemento.*

Allorchè il punto M' è arrivato in A' il *seno* è nullo, come nel punto A, ed il *coseno* è di nuovo eguale al raggio. Nel punto A' l'arco ABA' è eguale alla mezza-circonferenza, ovvero a π; l'angolo ACM è arrivato al suo maggior limite; ma nulla si oppone a ciò che il *raggio* CM, ed il punto descrivente non continuino il lor movimento, e non passino al disotto del diametro AA'. Il *seno*, il quale diviene allora P''M'', cade pure al disotto del diametro, ed aumenta a misura che il punto M'' avvicinasi a B', mentre che il coseno CP'' diminuisce. Al punto B', ove l'arco AB A'B' è i $\frac{3}{4}$ della circonferenza, ovvero $\frac{3}{2}\pi$, l'uno è eguale al *raggio* CB', e l'altro è nullo. Finalmente da B' sino ad A il *seno* P'''M''', sempre al disotto di AA', va continuamente diminuendo, ed il *coseno* CP''', il quale si trova allora dal medesimo lato ove desso era nel primo quarto di circolo AB, aumenta e diviene eguale al *raggio* in A. In questo punto il *seno* è nullo, il punto descrivente ha terminata una rivoluzione, ma desso può ricominciarne un'altra; e considerando sempre come un solo arco la totalità dello spazio percorso da questo punto fin dal principio del

movimento, avremo degli archi maggiori della circonferenza, e che avranno i medesimi *seni*, *coseni*, *tangenti*, *cotangenti*, di quelli, che sono stati descritti nella prima rivoluzione. Queste considerazioni conducono a delle conseguenze importantissime per l'analisi, e che io ho sviluppate nei miei *Trattati del Calcolo differenziale e del Calcolo integrale*.

23. Bisogna cercar adesso come l'espressioni algebriche dei *seni*, e *coseni* corrispondano alle diverse circostanze, che ho esposte. Per questo suppongo primieramente $a = \frac{1}{2}\pi$ nell'equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a \end{array}\right\} \ldots\ldots (A).$$

Osservando che $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, e che $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi = 1$, si trova

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi \pm b\right) = \mp \operatorname{sen} b,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi \pm b\right) = \cos b.$$

Bisogna notare due cose in quest'espressioni, cioè, il loro valore assoluto, ed il segno dal quale esso è affetto.

Questo valore si verifica sulla *figura*; poichè AB essendo eguale a $\frac{1}{2}\pi$, se si prenda l'arco BM′ per b, l'arco AM′ sarà $\frac{1}{2}\pi + b$; ma P′M′ essendo il *seno* di A′M′, come pure di AM′, sarà desso il *coseno* di BM′, ovvero di b, laddove CP′ ne sarà il *seno*.

Quanto poi al segno — dal quale $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + b\right)$ è affetto ne risulta che se si riguardano come positivi il *seno*, ed il *coseno* d'un arco minore del quarto della circonferenza, il *coseno* d'un arco maggiore sarà negativo, mentre

che il suo *seno* sarà positivo. Se facciasi ancora $b = \frac{1}{2}\pi$, avremo $\cos \pi = -1$, $\operatorname{sen} \pi = 0$.

Supponendo in seguito che nell' equazioni (A) $a = \pi$, otterremo, posto ciò che precede,

$$\cos(\pi \pm b) = -\cos b.$$

$$\operatorname{sen}(\pi \pm b) = \mp \operatorname{sen} b.$$

Il valore assoluto di queste formule può verificarsi colla stessa facilità di quello delle precedenti: il loro segno dimostra che qualunque arco compreso tra π, e $\frac{3}{2}\pi$ avrà il suo *seno*, ed il suo *coseno* negativi; ed allorchè $b = \frac{1}{2}\pi$, si ha

$$\cos \frac{3}{2}\pi = 0, \quad \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi = -1.$$

Finalmente quando $a = \frac{3}{2}\pi$, l' equazioni (A) si riducono, in virtù dei valori precedenti, a

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm b\right) = \pm \operatorname{sen} b,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi \pm b\right) = -\cos b,$$

e da ciò segue che qualunque arco compreso tra $\frac{3}{2}\pi$, e $\frac{4}{2}\pi$, ovvero 2π, ha il suo *coseno* positivo ed il suo *seno* negativo.

Recapitolando questi risultati vedremo

1.° Che dal punto A sino al punto A$'$, ove l' arco $ABA' = \pi$, i seni son positivi:

2.° Che dal punto A$'$ fino al punto A, ove l' arco $ABA'B'A = 2\pi$, e vale a dire da π sino a 2π, i *seni* son negativi:

3.° Che dal punto A fino al punto B, ove l' arco $AB = \frac{1}{2}\pi$, i *coseni* son positivi:

4.° Che dal punto B fino al punto B', ove l'arco ABA'B' $= \frac{3}{2}\pi$, e vale a dire da $\frac{1}{2}\pi$ a $\frac{3}{2}\pi$, i *coseni* son negativi:

5.° Finalmente che dal punto B' sino al punto A, ove l'arco ABA'B'A $= 2\pi$, e vale a dire da $\frac{3}{2}\pi$ a 2π, i *coseni* son positivi.

Ed osserverem senza pena che i *seni* cangian di segno allorchè dessi passano al disotto del diametro AA', e i *coseni* allorchè passano da un lato all'altro del punto C, ovvero che detti *coseni* cadono al di qua, o al di là del diametro BB' perpendicolare al primo.

Con queste attenzioni estenderemo le formule del n.° 11 a tutte le grandezze possibili degli archi AM, ed AN; e i Fig. 4. valori conclusi da queste formule si accorderanno con quelli, i quali si dedurrebbero dalla costruzione, e dai ragionamenti del n.° precitato, se si applicassero immediatamente agli archi proposti; esercizio il quale può essere utile al Lettore.

24. Seguendo il corso delle *tangenti*, troveremo che desse vanno sempre aumentando dal punto A *fig.* 10, fino Fig. 10. al punto B, ove l'arco AM è divenuto eguale ad $\frac{1}{2}\pi$. A questo punto la *secante* NC confondendosi con CB, è parallela alla *tangente* AN, ed in conseguenza più non l'incontra; di tal maniera che l'arco AB non ha, a parlar propriamente, *tangente trigonometrica*. Frattanto si dice che la sua *tangente* è infinita; ma per quest'espressione bisogna intendere che prendendo il punto M tanto vicino al punto B quanto sarà necessario, troveremo una tangente AN maggiore di qualunque siasi quantità che vorremo. Questo è pure ciò che dimostra l'equazione

$\tang a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$, la quale dà per tang a un valore tanto più grande quanto cos a è più piccolo, ovvero quanto più ci avviciniamo al punto B.

Allorchè $a = 0^q, 50$, si ottiene $\cos a = \operatorname{sen} a$, ed in conseguenza $\tang 0^q, 50 = 1$.

Dimostrasi la stessa cosa mediante il triangolo CAN, *fig.* 9, il quale diviene isoscele in questo caso, poichè l'an- Fig. 9.

golo ACN essendo eguale alla metà d'un retto, lo stesso necessariamente succede a riguardo anco dell'angolo ANC; la *tangente* AN è dunque eguale al *raggio*.

Fig. 10. Quando l'arco AM è maggiore di $\frac{1}{2}\pi$, il *raggio* MC non incontra altrimenti la linea AN al disopra del diametro, ma al disotto. La vera *tangente* AN' è eguale com'è facil vedere, ad A'n' *tangente* dell'arco A'M', *supplemento* di AM', ma si trova posta in un senso opposto. Nel terzo quarto di circolo la *tangente*, ch'è stata nulla al punto A', ripassa al disopra del diametro AA', ed AN è ancora la *tangente* dell'arco AA'M''. Il *raggio* divenendo nuovamente parallelo ad AN nel punto B', la *tangente* è infinita anco in questo punto passato il quale dessa ritorna al disotto del diametro: infatti l'arco AA'M''', per esempio, ha evidentemente per *tangente* AN'.

25. Ora esamino ciò che risulta dall'espressione algebrica $\tang a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a}$.

È manifesto che il suo valore sarà positivo in tutti i casi ove il *seno*, e il *coseno* saranno del medesimo segno, il che ha luogo da o fino a $\frac{1}{2}\pi$, e da π fino a $\frac{3}{2}\pi$; desso sarà in conseguenza negativo da $\frac{1}{2}\pi$ sino a π, e da $\frac{3}{2}\pi$ fino a 2π; dal che ne segue che, per le tangenti, come pei *seni*, e i *coseni*, i cangiamenti di segno corrispondono pure ai cangiamenti di situazione. Troverebbesi parimente che le *cotangenti* son positive da o° fino ad $\frac{1}{2}\pi$, e da π fino a $\frac{3}{2}\pi$, e negative da $\frac{1}{2}\pi$ fino a π, e da $\frac{3}{2}\pi$ fino a 2π.

26. Nel calcolo incontransi alcune volte degli archi negativi, il *seno* ed il *coseno* dei quali possono pure determinarsi col mezzo delle formule del n.° 11. L'espressione di sen $(a-b)$ cangiando di segno allorchè vi si cangia a in b, e b in a, fa vedere che sen $(b-a) = -$ sen $(a-b)$;

così quando $a > b$, l'arco negativo $b - a$ ha un *seno* negativo.

Se si costruisse la *fig.* 4ª, in questa ipotesi, prendendo $AM = b$, $MN = a$, e portando quest' ultimo arco al disotto del punto M, per operare come è stato detto nel n.° 11, l'arco AN′ si troverebbe al disotto di AC in luogo d'essere al disopra: il *seno* Q′N′ cangerebbe dunque di lato, nello stesso modo che l'arco. Quanto al *coseno*, desso resterebbe dal medesimo lato, e col mezzo delle formule si trova pure che $\cos(b-a) = \cos(a-b)$. Fig. 4ª.

27. La proposizion dimostrata nel n.° 11, ha ancora delle numerose conseguenze, alcune delle quali saranno in seguito necessarie; ecco perchè io le porrò adesso.

1.° Sommando tra loro le due equazioni

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{R},$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a}{R},$$

avremo

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = \frac{2 \operatorname{sen} a \cos b}{R},$$

di dove

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{R}{2} \operatorname{sen}(a+b) + \frac{R}{2} \operatorname{sen}(a-b).$$

2.° Togliendo la seconda equazion dalla prima avremo

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = \frac{2 \operatorname{sen} b \cos a}{R},$$

di dove

$$\operatorname{sen} b \cos a = \frac{R}{2} \operatorname{sen}(a+b) - \frac{R}{2} \operatorname{sen}(a-b).$$

Allorchè $a = b$, questa formula e la precedente danno

$$\cos a \operatorname{sen} a = \frac{R}{2} \operatorname{sen} 2a.$$

3.° Sommando tra loro le due equazioni

$$\cos(a+b) = \frac{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{R},$$

$$\cos(a-b)=\frac{\cos a\cos b+\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}{R},$$

avremo

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=\frac{2\cos a\cos b}{R},$$

d' onde

$$\cos a\cos b=\frac{R}{2}\cos(a+b)+\frac{R}{2}\cos(a-b).$$

Allorchè $a=b$, questa formula dà

$$\cos a^2=\frac{R}{2}\cos 2a+\frac{R^2}{2},$$

osservando che il *coseno* è eguale al *raggio* allorchè l'arco è nullo.

4.° Togliendo la prima dalla seconda, conseguiremo

$$\cos(a-b)-\cos(a+b)=\frac{2\,\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b}{R},$$

di dove

$$\text{sen}\, a\,\text{sen}\, b=\frac{R}{2}\cos(a-b)-\frac{R}{2}\cos(a+b).$$

Allorchè $a=b$, questa formula somministra

$$\text{sen}\, a^2=\frac{R^2}{2}-\frac{R}{2}\cos 2a.$$

5.° Se si faccia $a+b=a'$, $a-b=b'$, troveremo, sommando queste due equazioni, $2a=a'+b'$, e togliendone la seconda dalla prima, $2b=a'-b'$; segue da ciò che

$$a=\frac{a'+b'}{2},\ b=\frac{a'-b'}{2}.$$

Ponendo questi valori di a e di b nell'espressioni di sen a cos b, sen b cos a, cos a cos b, sen a sen b, precedentemente ottenute, troveremo

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\text{sen}\, a'+\text{sen}\, b')$$

$$\cos\frac{1}{2}(a'+b')\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\text{sen}\, a'-\text{sen}\, b')$$

$$\cos\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\cos a'+\cos b')$$

$$\text{sen}\frac{1}{2}(a'+b')\,\text{sen}\frac{1}{2}(a'-b')=\frac{R}{2}(\cos b'-\cos a').$$

Dividendo la seconda delle formule precedenti per la prima, avremo

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a'+b')\,\text{sen}\frac{1}{2}(a'-b')}{\text{sen}\frac{1}{2}(a'+b')\cos\frac{1}{2}(a'-b')}=$$

$$\frac{\text{sen}\frac{1}{2}(a'-b')\cos\frac{1}{2}(a'+b')}{\cos\frac{1}{2}(a'-b')\,\text{sen}\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\text{sen}\,a'-\text{sen}\,b'}{\text{sen}\,a'+\text{sen}\,b'}$$

Osservando in seguito che $\frac{\text{sen A}}{\cos A}=\frac{\text{tang A}}{R}$ (8), e che in conseguenza $\frac{\cos A}{\text{sen A}}=\frac{R}{\text{tang A}}$, otterremo

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(a'-b')}{\text{tang}\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\text{sen}\,a'-\text{sen}\,b'}{\text{sen}\,a'+\text{sen}\,b'}$$

Concluderem parimente dalle due ultime formule riportate qui sopra che

$$\frac{\cos b'-\cos a'}{\cos a'+\cos b'}=\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(a'+b')\,\text{tang}\frac{1}{2}(a'-b')}{R^2}.$$

Dividendo l' espressione di sen $(a \pm b)$ per quella di cos $(a \pm b)$, avremo

$$\frac{\text{sen}(a\pm b)}{\cos(a\pm b)}=\frac{\text{sen}\,a\cos b\pm\text{sen}\,b\cos a}{\cos a\cos b\mp\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b};$$

dividendo in seguito il numeratore ed il denominatore della frazione del secondo membro per cos a cos b, desso diverrà

$$\frac{\frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \pm \frac{\text{sen}\, b}{\cos b}}{1 \mp \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \cdot \frac{\text{sen}\, b}{\cos b}};$$

e siccome in generale $\frac{\text{sen A}}{\text{cos A}} = \frac{\text{tang A}}{\text{R}}$ (8), si otterrà con questo mezzo

$$\frac{\text{tang}\,(a \pm b)}{\text{R}} = \frac{\frac{\text{tang}\, a}{\text{R}} \pm \frac{\text{tang}\, b}{\text{R}}}{1 \mp \frac{\text{tang}\, a}{\text{R}} \cdot \frac{\text{tang}\, b}{\text{R}}} = \frac{\text{R}(\text{tang}\, a \pm \text{tang}\, b)}{\text{R}^2 \mp \text{tang}\, a\, \text{tang}\, b},$$

e finalmente $\text{tang}\,(a \pm b = \frac{\text{R}^2\,(\text{tang}\, a \pm \text{tang}\, b)}{\text{R}^2 \mp \text{tang}\, a\, \text{tang}\, b}$.

Rammentandosi che $\cot \text{A} = \frac{\text{R}^2}{\text{tang A}}$ (9), troveremo

$$\cot\,(a \pm b) = \frac{\text{R}^2}{\text{tang}\,(a \pm b)} = \frac{\text{R}^2 \mp \text{tang}\, a\, \text{tang}\, b}{\text{tang}\, a \pm \text{tang}\, b} = \frac{\text{R}^2 \mp \frac{\text{R}^2}{\cot a} \cdot \frac{\text{R}^2}{\cot b}}{\frac{\text{R}^2}{\cot a} \pm \frac{\text{R}^2}{\cot b}};$$

e riducendo, arriveremo a

$$\cot\,(a \pm b) = \frac{\cot a \cot b \mp \text{R}^2}{\cot b \pm \cot a}.$$

28. L'equazione $\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(a' - b')}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(a' + b')} = \frac{\text{sen}\, a' - \text{sen}\, b'}{\text{sen}\, a' + \text{sen}\, b'}$,

dalla quale resulta che *la somma dei seni di due archi sta alla lor differenza, come la tangente della semi-somma di questi archi sta alla tangente della lor semi-differenza*, si ottiene immediatamente per mezzo d'una costruzione geometrica elegantissima.

AM ed AN, *fig.* 11, essendo i due archi a' e b', avremo $MP = \text{sen}\, a'$, $NQ = \text{sen}\, b'$; conducendo NC parallela al diametro AB, e prolungando MP fino in M', resulterà Fig. 11.

$$MR = MP - NQ = \text{sen}\, a' - \text{sen}\, b',$$
$$M'R = M'P + NQ = \text{sen}\, a' + \text{sen}\, b' \; (14).$$

Ciò fatto, se dal punto C come centro, e con un *raggio* CD eguale a quello del circolo ACB, si descriva un arco EDG, e si conduca al punto D di quest'arco una *tangente* terminata dalle rette CM e CM' è manifesto che DF, DH saranno le *tangenti* degli archi DE e DG, i quali misurano gli angoli MCN e NCM'; e siccome questi angoli hanno il lor vertice alla circonferenza del circolo ACB, dessi avran pur per misura la metà di

$$NM = AM - AN = a' - b',$$

e quella di

$$NM' = AM' + AN = a' + b';$$

avrem dunque

$$DF = \text{tang}\, \frac{1}{2}\,(a' - b'),\; DH = \text{tang}\, \frac{1}{2}\,(a' + b').$$

Ma a motivo delle paralelle MM' e FH, avrem questa proporzione

$$MR : M'R :: DF : DH,$$

$$\text{sen}a' - \text{sen}b' : \text{sen}a' + \text{sen}b' :: \text{tang}\frac{1}{2}\,(a' - b') : \text{tang}\frac{1}{2}\,(a' + b');$$

ciò che riducesi all'equazione proposta.

Sarebbe facile di modificare la costruzione suddivisata in modo da dedurne le diverse equazioni analoghe a quelle che abbiam dimostrate.

29. Siccome si ha spesso occasione di far uso delle formule, alle quali sono precedentemente arrivato, le ho riunite nella *Tavola* seguente con altre, le quali deduconsi con metodi facili a immaginarsi. I numeri, che si leggono accanto a ciascuna formula, indicano gli articoli ove desse sono state trovate, ovvero dai quali possiamo concluderle.

Tavola delle Formule Trigonometriche le più usitate.

$$\text{sen}\, a^2 + \cos a^2 = R^2 \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,(a \pm b = \dfrac{\text{sen}\, a \cos b \pm \text{sen}\, b \cos a}{R} \\ \cos(a \pm b) = \dfrac{\cos a \cos b \pm \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}{R} \end{array}\right\} (11)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\, a \cos b = \dfrac{1}{2} R\,[\,\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)\,] \\ \cos a\, \text{sen}\, b = \dfrac{1}{2} R\,[\,\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)\,] \\ \cos a \cos b = \dfrac{1}{2} R\,[\,\cos(a+b) + \cos(a-b)\,] \\ \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b = -\dfrac{1}{2} R\,[\,\cos(a+b) - \cos(a-b)\,] \end{array}\right\} (27)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\, a + \text{sen}\, b = \dfrac{2}{R}\, \text{sen}\, \dfrac{1}{2}(a+b) \cos \dfrac{1}{2}(a-b) \\ \text{sen}\, a - \text{sen}\, b = \dfrac{2}{R} \cos \dfrac{1}{2}(a+b)\, \text{sen}\, \dfrac{1}{2}(a-b) \\ \cos a + \cos b = \dfrac{2}{R} \cos \dfrac{1}{2}(a+b) \cos \dfrac{1}{2}(a-b) \\ \cos a - \cos b = -\dfrac{2}{R}\, \text{sen}\, \dfrac{1}{2}(a+b)\, \text{sen}\, \dfrac{1}{2}(a-b) \end{array}\right\} (27)$$

$$\text{sen}\, 2a = \frac{2\,\text{sen}\, a \cos a}{R} (11), \quad \text{sen}\, \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - 2R\cos a} \quad (13)$$

$$\cos 2a = \frac{\cos a^2 - \text{sen}\, a^2}{R} = \frac{2 \cos a\, 2^2 - R^2}{R} (11)$$

Seguito della Tavola delle Formule Trigonometriche.

$$\text{sen}\, a^2 = \frac{1}{2}\, R\,(R - \cos 2a)\ (27)$$

$$\cos a^2 = \frac{1}{2}\, R\,(R + \cos 2a)\ (27)$$

$$\text{sen}\, a^2 - \text{sen}\, b^2 = \cos b^2 - \cos a^2 = \text{sen}\,(a+b)\ \text{sen}\,(a-b) (11,10)$$

$$\cos a^2 - \text{sen}\, b^2 = \cos\,(a+b)\cos\,(a-b)\ (11,\ 10)$$

$$\text{tang}\, a = \frac{R\ \text{sen}\ a}{\cos a} (8),\ \cot a = \frac{R^2}{\text{tang}\ a} = \frac{R \cos a}{\text{sen}\ a} (9)$$

$$\sec a = \frac{R^2}{\cos a},\ \text{cosec}\ a = \frac{R^2}{\text{sen}\ a}\ (8)$$

$$\text{tang}\,(a \pm b) = \frac{R\ \text{sen}\,(a \pm b)}{\cos\,(a \pm b)} = \frac{R^2\,(\text{tang}\ a \pm \text{tang}\ b)}{R^2 \mp \text{tang}\ a\ \text{tang}\ b} (27)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tang}\ a + \text{tang}\ b &= \frac{R^2\ \text{sen}\,(a+b)}{\cos a \cos b}\\
\text{tang}\ a - \text{tang}\ b &= \frac{R^2\ \text{sen}\,(a-b)}{\cos a \cos b}\\
\cot a + \cot b &= \frac{R^2\ \text{sen}\,(a+b)}{\text{sen}\ a\ \text{sen}\ b}\\
\cot a - \cot b &= -\frac{R^2\ \text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\ a\ \text{sen}\ b}
\end{aligned}\right\}\ (8,\ 11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{tang}\ a^2 - \text{tang}\ b^2 &= \frac{R^4\ \text{sen}\,(a+b)\ \text{sen}\,(a-b)}{\cos a^2 \cos b^2}\\
\cot a^2 - \cot b^2 &= -\frac{R^4\ \text{sen}\,(a+b)\ \text{sen}\,(a-b)}{\text{sen}\ a^2\ \text{sen}\ b^2}
\end{aligned}\right\}\ (8,\ 11)$$

Seguito della Tavola delle Formule trigonometriche.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\, \frac{1}{2}(a-b)} \\
&\frac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\cos a + \cos b} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(a+b)}{R},\ \frac{\text{sen}\, a}{R + \cos a} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2} a}{R} \\
&\frac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\cos a - \cos b} = \frac{\cot \frac{1}{2}(a-b)}{R},\ \frac{\text{sen}\, a}{R - \cos a} = \frac{\cot \frac{1}{2} a}{R} \\
&\frac{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b}{\cos a + \cos b} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}(a-b)}{R} \\
&\frac{\text{sen}\, a - \text{sen}\, b}{\cos a - \cos b} = \frac{\cot \frac{1}{2}(a+b)}{R} \\
&\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = \frac{\cot \frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\, \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\sec a + \sec b}{\sec a - \sec b}
\end{aligned}\right\}(27)$$

$$\text{sen}\, a = \frac{R\, \text{tang}\, a}{\sqrt{R^2 + \text{tang}\, a^2}},\ \cos a = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \text{tang}\, a^2}}\ (8,\ 10)$$

$$R = \text{sen}\, 1^q = \cos 0^q = \text{tang}\, \frac{1^q}{2} = \cot \frac{1^q}{2} = \sec 0^q = \text{cosec}\, 1^q$$

$$= \frac{1}{2} \sec \frac{2^q}{3}\ (23,\ 24)$$

$$\text{sen}\, a = \frac{1}{2}\, \text{corda}\, 2a\ (14),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{sen}(1^q \pm b) = +\cos b,\ \cos(1^q \pm b) = \mp \text{sen}\, b \\
&\text{sen}(2^q \mp b) = \mp \text{sen}\, b,\ \cos(2^q \mp b) = -\cos b \\
&\text{sen}(3^q \mp b) = -\cos b,\ \cos(3^q \mp b) = \pm \text{sen}\, b \\
&\text{sen}(4^q \pm b) = \pm \text{sen}\, b,\ \cos(4^q \pm b) = +\cos b
\end{aligned}\right\}(23)$$

30. Principio adesso a parlare dell' applicazion delle *Tavole Trigonometriche* alla risoluzione dei triangoli, per la quale bisogna rammemorarsi che col mezzo di queste *Tavole*, allorchè un angolo è cognito, il valor del suo *seno*, quello del suo *coseno*, quello della sua *tangente*, e quello della sua *cotangente* son parimente cogniti, e che reciprocamente, quando il valore d' una di queste linee è dato, quello dell' arco debb' essere riguardato come dato.

Sia CDE, *fig.* 12, un triangolo rettangolo in D, da uno degli angoli acuti C, come centro, si descriva, con un raggio eguale a quel delle *Tavole*, l' arco AM; si abbassi MP perpendicolare sopra AC; finalmente s' alzi la *tangente* AN per formare i due triangoli delle *Tavole*, cioè, CPM, che sarà quello del *seno* e del *coseno*, e CAN quello della *tangente* e della *secante*. L' uno e l' altro saranno simili al proposto triangolo, e paragonandoli successivamente con quest' ultimo ne ricaveremo Fig. 12.

$$\left.\begin{array}{l} CM : PM :: CE : DE \\ CM : CP :: CE : CD \end{array}\right\} \text{ovvero} \left\{\begin{array}{l} R : \text{sen } C :: CE : ED \\ R : \cos C :: CE : CD \end{array}\right.$$

$$CA : AN :: CD : DE \text{ ovvero } R : \text{tang } C :: CD : DE.$$

L'angolo E essendo complemento dell' angolo C, avremo cos C = sen E; le due prime proporzioni possono unirsi in una sola ed enunciarsi così: *Il raggio sta al seno d' uno degli angoli acuti del triangolo rettangolo proposto, come l' ipotenusa sta al lato opposto a quest' angolo.*

La terza dimostra che *il raggio sta alla tangente d' uno degli angoli acuti del triangolo rettangolo proposto, come il lato dell' angolo retto adiacente a quell' angolo acuto sta al lato opposto.*

Il *raggio* essendo sempre dato servirà conoscere due dei tre altri termini di ciascuna delle proporzioni, che ho enunciate per trovar quella che resta. Così in virtù della prima determinerem sempre una di queste tre cose, cioè, *l' ipotenusa, un lato ed un angolo acuto*, allorchè se ne conosceranno due sole.

Ho posto semplicemente un angolo acuto, benchè la proporzione esiga che quest'angolo sia opposto al lato dato o cercato, perchè uno degli angoli acuti fa trovar l'altro immediatamente; ed in conseguenza, se quello che si conosce ovvero quel che si cerca, non soddisfi a tal condizione, si può tosto impiegare il suo complemento.

Per la seconda proporzione determineremo sempre una

di queste tre cose, cioè, i *due lati d'un angolo retto*, *ed un angolo acuto* allorchè se ne conosceranno due sole.

Segue da ciò 1.° che, conoscendo un lato ed un angolo d'un triangolo rettangolo, si possono calcolare gli altri due lati; 2.° che conoscendo due qualunque dei lati, si possono calcolar gli angoli acuti.

Questi due casi non comprendono quello ove si hanno due lati qualunque d'un triangolo, e se ne cerca il terzo; ma questo caso si risolve subito mediante la proprietà cognita del triangolo rettangolo, la qual somministra

$\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{CE}^2$, e di dove ricavasi $CE = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2}$.

Se si conoscesse l'ipotenusa CE ed uno dei lati dell'angolo retto, DE, per esempio, avrebbesi

$$CD = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{DE}^2}.$$

Osservando che $\overline{CE}^2 - \overline{DE}^2 = (CE + DE)(CE - DE)$, e prendendo i logaritmi dei due membri dell'equazione $CD = \sqrt{(CE + DE)(CE - DE)}$, si troverebbe

$$l\,CD = \frac{1}{2}[\,l\,(CE + DE) + l\,(CE - DE)\,].$$

Allorchè si costruiscono formule, le quali debbon servire a calcoli numerici, fa di mestieri procurar sempre di prepararle in tal modo che vi si possano applicare comodamente i logaritmi, e vale a dire che non siamo obbligati di passare dai logaritmi ai numeri, e di ritornare da questi ultimi ai primi se non che il meno che sia possibile. Applicando i logaritmi alla ricerca di CD col mezzo della sua prima espressione, conosceremo evidentemente l'oggetto di quest'osservazione speciale.

Terminerò quest'esposizion dei principî, i quali conducono a risolvere i triangoli rettangoli, osservando che i due casi trattati in ultimo luogo si risolvono pure mediante le due proporzioni riportate sul principio di quest'articolo: poichè 1.° se conoscendo CD e DE si voglia trovar CE, potrem calcolare uno degli angoli acuti, C, per esempio, col mezzo della proporzione R : tang C :: CD : DE; avendo trovato quest'angolo calcoleremo l'ipotenusa CE colla proporzione R : sen C :: CE : DE, nella quale conosceremo

i tre termini R, sen C e DE; 2.° allorchè conosceremo l'ipotenusa CE ed uno degli altri lati, CD, per esempio, calcoleremo l'angolo acuto opposto al lato cercato mediante la proporzione R : sen E ovvero cos C :: CE : CD; poi troveremo il lato DE colla proporzione R : sen C :: CE : DE.

31. Si può riepilogare ciò che abbiam detto sui triangoli rettangoli in una maniera comoda denotando i lor angoli per A, B, C, essendo A l'angolo retto, e chiamando a, b e c i lati, i quali son respettivamente opposti a ciascun di questi angoli, come lo mostra la *fig.* 13. Avremo primieramente pel primo principio Fig. 13.

$$R : \text{sen } C :: a : c, \quad R : \text{sen } B :: a : b,$$

di dove ricaveremo

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen}\, C}{R}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{R}.$$

Eliminando a da queste due equazioni, il che si fa dividendo ciascun membro della prima per il suo corrispondente nella seconda, troveremo

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{sen}\, C}{\text{sen}\, B};$$

e siccome sen B = cos C, e $\frac{\text{sen}\, C}{\cos C} = \frac{\text{tang}\, C}{R}$, ne resulterà

$\frac{c}{b} = \frac{\text{tang}\, C}{R}$; equazione, che rappresenta il secondo principio enunciato nel numero precedente.

Finalmente, se si quadra ciascun membro delle due prime equazioni, e si sommino in seguito membro a membro l'equazioni resultanti osservando che

$$\text{sen } C^2 + \text{sen } B^2 = \text{sen } C^2 + \cos C^2 = R^2 \text{ (10) avremo}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1, \text{ ovvero } b^2 + c^2 = a^2.$$

Segue da ciò che le due equazioni

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{sen}\, C}{R}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{R},$$

bastano unitamente alla relazione, che esiste tra gli angoli B e C, per risolvere tutti i casi dei triangoli rettangoli.

32. Il principio, sul quale è fondata la risoluzione dei triangoli rettangoli, conduce a quella dei triangoli qualunque essi sieno, abbassando dall'angolo B del triangolo ABC,
Fig. 14. *fig.* 14, una perpendicolare BD, formerem due triangoli ABD, BDC, rettangoli in D; avremo nel primo

R : sen A :: AB : BD

e nel secondo

R : sen C :: BC :: BD,

le quali proporzioni somministrano

R × BD = sen A × AB, R × BD = sen C × BC,

d'onde in conseguenza procede

sen A × AB = sen C × BC ovvero sen A : sen C :: BC : AB.

Allorchè la perpendicolare cade al di fuori, l'angolo C non è comune al triangolo ABC ed al triangolo BCD, ma l'angolo BCD e l'angolo BCA, equivalendo insieme a due angoli retti, hanno il medesimo *seno* (22).

La proporzione ottenuta quì sopra può convertirsi in principio generale, ed enunciarsi così: *In un triangolo qualunque i seni degli angoli sono tra loro come i lati opposti a questi angoli.*

33. La medesima proposizione dimostrasi pure nella maniera seguente, la quale sembra più analoga all'idea, che ho di già datà della Trigonometria nei num.[i] 1.° e 2.°
Fig. 15. Avendo inscritto il triangolo ABC, *fig.* 15, in un circolo, se si descriva col centro O di questo circolo, e con un raggio O*a*, eguale a quello delle *Tavole*, un altro circolo *abc*, e poi si uniscano con le rette, *ab*, *bc*, ed *ac*, i punti ove i raggi AO, BO, CO incontrano il circolo delle *Tavole*, formeremo un triangolo *abc* simile al triangolo proposto, e di cui i lati *ab*, *bc* ed *ac* si dedurran dalle *Tavole.*

La *similitudine* dei due triangoli ABC ed *abc* divien manifesta allorchè s'osserva che le rette *a*O, *b*O e *c*O essendo eguali, come raggi d'un medesimo circolo come lo sono le rette AO, BO, CO, i triangoli AOB, BOC ed AOC hanno i loro lati, AO e BO, BO e CO, AO e CO tagliati proporzionalmente nei punti *a* e *b*, *b* e *c*, *a* e *c*, ed in conseguenza le rette AB e *ab*, BC e *bc*, AC e *ac* son respettivamente paralelle: si ha dunque

AB : BC : AC :: *ab* : *bc* : *ac*,

ovvero

$$:: \frac{1}{2} ab : \frac{1}{2} bc : \frac{1}{2} ac.$$

Ciò posto gli angoli del triangolo *abc* avendo i loro vertici sulla circonferenza, son misurati dalla metà dell'arco, che sottende il lato, che loro è opposto, e ciascun di questi archi ha evidentemente per *seno* la metà di questo medesimo lato (14): dunque

$$\frac{1}{2} ab = \text{sen}\, c = \text{sen C},$$

$$\frac{1}{2} bc = \text{sen}\, a = \text{sen A},$$

$$\frac{1}{2} ac = \text{sen}\, b = \text{sen B},$$

ed in conseguenza

$$\text{AB} : \text{BC} : \text{AC} :: \text{sen C} : \text{sen A} : \text{sen B}.$$

Il paragone dei triangoli AOB ed *aOb* dimostra di più che AB : *ab* :: AO : *a*O, ovvero che AB : 2 sen C :: AO : *a*O, e vale a dire che *ciascun lato del triangolo* ABC *sta al doppio del seno dell'angolo che gli è opposto come il raggio del circolo circoscritto sta a quel delle Tavole* (*).

34. Denotando, come nel n.° 31, i tre angoli per A, B, C, ed i lati respettivamente opposti a ciascun di questi angoli per *a*, *b*, *c*, avremo, dietro a ciò che precede, le proporzioni

$$\text{sen A} : \text{sen B} :: a : b,$$
$$\text{sen A} : \text{sen C} :: a : c,$$
$$\text{sen B} : \text{sen C} :: b : c,$$

(*) *Potrebbonsi considerare le linee rette* ab, bc *ed* ac *come i* seni *medesimi di questi angoli A, B, C, prendendo per unità il diametro del circolo* abc. *Egli è in questa maniera che il Sig.* Carnot *le ha presentate nell'opera intitolata* Geometria di posizione. *Vi si trova, dietro a questa definizione, una dimostrazione semplicissima ed elegantissima della proposizione del n.° 11, e delle sue derivate le più importanti.*

dalle quali ne dedurremo l'equazioni.

$$\frac{b}{a}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},\ \frac{c}{a}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A},\ \frac{c}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}.$$

Risolveremo immediatamente con queste proporzioni un triangolo: 1.° *allorchè si conosceranno due angoli e un lato*, poichè allora tutti gli angoli saranno dati, ed i lati cercati saranno necessariamente opposti a due di questi angoli, se, per esempio, a è dato, come pure gli angoli B e C, toglieremo la somma di questi angoli da due retti per aver l'angolo A, e le due prime proporzioni faran conoscere i lati cercati b e c; 2.° *quando avremo un angolo e due lati, uno dei quali sia opposto all'angolo dato*; se questo è, per esempio, l'angolo A, coi lati a e b, calcoleremo l'angolo B per la prima proporzione, e conoscendo allora due angoli ricaderemo nel caso precedente.

Vi son due casi, i quali non essendo compresi negli altri, che ho esaminati, sembrano sfuggire al metodo: questi son quelli, nei quali *si conoscon due lati e l'angolo contenuto*, *ovvero i tre lati*; ora mi occuperò dell'uno e dell'altro.

35. Suppongo in primo luogo che si conoscono i due lati a e b e l'angolo contenuto C. Ponendo l'equazioni

$$\frac{c}{a}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A},\ \frac{c}{b}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$$

sotto la forma

$$a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A,\quad b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B,$$

per sommarle membro a membro, ed in seguito sottrarle una dall'altra, si trova

$$(a+b)\operatorname{sen} C = c(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B),$$
$$(a-b)\operatorname{sen} C = c(\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B);$$

dividendo l'ultimo resultato pel primo, il lato incognito o disparisce, e si ha

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}.$$

Ma abbiamo veduto (27) che

$$\frac{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}$$

ne concluderemo dunque

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(A+B)}\,(*),$$

di dove ne dedurremo la proporzione

$$a+b : a-b :: \text{tang}\,\frac{1}{2}\,(A+B) : \text{tang}\,\frac{1}{2}\,(A-B),$$

la quale si enuncia così: *La somma di due lati d' un triangolo sta alla lor differenza, come la tangente della semi somma degli angoli opposti a questi lati sta alla tangente della lor semi differenza.*

Tutto è cognito in questa proporzione eccettuato A—B, poichè, se si tolga da due quadranti la misura dell'angolo cognito C, il resto sarà quella di (A+B); prendendo perciò il valore di tang $\frac{1}{2}$(A—B), otterremo

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\times\text{tang}\,\frac{1}{2}\,(A+B);$$

formula, che farà conoscere A—B. Ponendo in seguito

$$A+B=m,\ A-B=n,$$

e sommando quest' equazioni, concluderemo

$$2A=m+n,\ \text{ovvero}\ A=\frac{m+n}{2},$$

dipoi togliendo la seconda dalla prima, otterremo

$$2B=m-n,\ \text{ovvero}\ B=\frac{m-n}{2}.$$

(*) *Possiamo pure, per maggior brevità, segnare la proporzione*

$$a : b :: sen\,A : sen\,B\ (32),$$

dalla quale immediatamente ricavasi

$$a+a : a-b :: sen\,A+sen\,B : sen\,A-sen\,B;$$

e ne concluderemo, per il n.° 28,

$$a+b : a-b :: tang\,\frac{1}{2}\,(A+B) : tang\,\frac{1}{2}\,(A-B).$$

Si fa manifesto da ciò che, *conoscendo la somma* m *e la differenza* n *dei due angoli dimandati* A *e* B, *troveremo il maggiore sommando la metà della somma colla metà della differenza, ed il minore togliendo la metà della differenza dalla metà della somma.*

Allorchè avrem calcolati tutti gli angoli, troveremo il terzo lato colla regola della n.° 32.

36. Possiamo pure trovare immediatamente il terzo lato abbassando una perpendicolare sopra uno dei lati dati, dal-
Fig. 16. l'angolo A, per esempio, sul lato dato BC, *fig.* 16. Avremo, per la proprietà cognita dei triangoli obliquangoli, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \mp 2\,BC \times DC$, il segno superiore avendo luogo quando la perpendicolare cade dentro del triangolo, come nella figura, ed il segno inferiore nel caso che dessa cada al di fuori; di più, nel triangolo rettangolo ADC si ha (30) $DC = AC \times \text{sen}\, DAC = AC \times \cos C$, facendo $R = 1$; concluderemo da ciò $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \times BC \times \cos C$, ed in conseguenza

$$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC \,.\, BC \,.\, \cos C},$$

formula, la quale riducesi, secondo i simboli stabiliti, a

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C};$$

e darà il lato c per mezzo degli altri due a e b, e dell'angolo C. Un segno solo basta riguardo al termine $2ab \cos C$, perchè, quando l'angolo C è ottuso, il suo *coseno* è negativo e cangia per conseguenza il — in + come lo esige la costruzione geometrica.

37. Questa formula non si presta tanto comodamente al calcolo logaritmico; ma siccome si ha

$$\cos 2C = 1 - 2 \,\text{sen}\, C^2 \ (27),$$

avremo pure

$$\cos C = 1 - 2 \left(\text{sen}\, \frac{1}{2} C\right)^2,$$

scrivendo $\frac{1}{2}$ C in luogo di C; e in virtù di questa trasformazione otterremo

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 4\,ab\,(\text{sen}\frac{1}{2}\,C)^2} =$$

$$\sqrt{(a-b)^2 + 4ab\,(\,\text{sen}\frac{1}{2}\,C\,)^2}.$$

Facendo in seguito $\frac{2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,C}{a-b}\sqrt{ab} = \text{tang}\,\alpha$, ne resulterà

$c = (\,a-b\,)\,\sqrt{1 + \text{tang}\,\alpha^2} = \frac{a-b}{\cos\alpha}$, poichè

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}\,\alpha^2}}$. Calcolerem facilmente la tang α col mezzo della prima formula, ed allorchè saremo arrivati al-l'angolo α, avremo

per la seconda $c = \frac{a-b}{\cos\alpha}$.

38. L'equazione $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$ fa conoscere l'angolo C allorchè i tre lati a, b e c, son dati; poichè inalzando ciascun dei suoi membri al quadrato, se ne ricava

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C.$$

di dove

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}:$$

ma quest' espressione essendo poco comoda per il calcolo logaritmico, fa di mestieri cercarne un'altra.

Se si scriva $2C'$ per C, e pongasi $1-2\,\text{sen}\,C'^2$ in luogo di cos C (27), avremo quest' espressione

$$2\,\text{sen}\,C'^2 = 1 + \frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} = \frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{2ab} =$$

$$\frac{c^2-(\,a-b\,)^2}{2ab} = \frac{(\,c+a-b\,)\,(c-a+b)}{2ab},$$

ed in conseguenza

$$\text{sen } C'^2 = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{4ab} = \frac{\frac{(c+a-b)}{2}\cdot\frac{(c-a+b)}{2}}{ab}:$$

ma è facil vedere che

$$\frac{c+a-b}{2} = \frac{(c+a+b)}{2} - b,$$

$$\frac{c-a+b}{2} = \frac{c+a+b}{2} - a;$$

se dunque si faccia $c+a+b=f$, avremo, prendendo la radice quadrata, e rimettendo $\frac{1}{2}$ C in luogo di C',

$$\text{sen } \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}f-a)(\frac{1}{2}f-b)}{ab}}$$

formula, la quale conduce alla regola seguente:

Per trovare un angolo d' un triangolo allorchè i tre lati son cogniti, dalla semi somma dei tre lati togliete successivamente ciascuno di quelli, che comprendon l' angolo cercato; moltiplicate i due resti tra loro; dividete questo prodotto per il prodotto dei lati, che comprendon l' angolo cercato, e prendete la radice quadrata del quoziente; avrete il seno della metà di quest' angolo.

39. La soluzione di tutti i casi de' triangoli obliquangoli non dipende, come si vede, che dalle tre regole enunciate nei num. i 32, 35, e 38, e riposa sul principio, dal quale si è ricavata la soluzione dei triangoli rettangoli nel n.° 30: sarà dunque facile, con un poco d' attenzione, di ritener queste regole: ed il calcolo degli esempî che darò, sarà bastante per porre il Lettore in istato di ben applicarle.

Esempî della risoluzione dei Triangoli rettangoli.

1.° Conoscendo nel triangolo rettangolo BAC, *fig.* 13, Fig. 13. l' ipotenusa *a* ed un lato *c*, trovare l' angolo oppposto C a questo lato. Sia l' ipotenusa $a=13^{metri}$, 178, il lato $c=7^m$,

357. Avremo (31), per determinar sen C, la proporzione

$$a : c :: R : \text{sen}\, C,$$

dalla quale ricavasi

$$\text{sen}\, C = \frac{R \times c}{a},$$

e prendendo i logaritmi,

$$\text{l sen}\, C = \text{l}R + \text{l}c - \text{l}a.$$

Per maggiore semplicità, si fa quasi sempre il *raggio* eguale all'unità; il suo logaritmo è allora *zero*, non bisognerà in conseguenza tenerne alcun conto, ed in luogo d'effettuare le sottrazioni, s'impiegano i *complementi aritmetici*, la teorica dei quali vien esposta alla fine de'miei *Elementi d'Algebra.* Ecco l'operazione:

lc = l7, 357 = ... 0,8667008
comp. arit. l*a* = comp. arit. l 13,178 = 8,8801505

somma, ovvero l sen C = ... 9,7468513,
che, nelle *Tavole* corrisponde a 0^q, 377 = C.

2.° Conoscendo l'angolo C = 0^q, 5837, l'ipotenusa $a = 33^m$, 253, trovare il lato *b*. Avremo (31)

$$R : \text{sen}\, B \text{ ovvero } \cos C :: a : b,$$

di dove ricavasi

$$b = \frac{a \times \cos C}{R},$$

$$\text{l}b = \text{l}a + \text{l} \cos C - \text{l}R = \text{l}a + \text{l} \cos C;$$

ora, l*a* = l33,253 = ... 1,5218308
l cos C = l cos 0^q, 5837 = ... 9,7841210

somma, ovvero l *b* = ... 1,3059518,
che corrisponde nelle *Tavole* a 20^m,228 = *b*, coll'errore minor d'un millesimo.

3.° Conoscendo il lato $c = 5^m$,391, e l'angolo B = 0^q,3502, trovare il lato *b*. Avremo

$$R : \text{tang}\, B :: c : b;$$

di dove ricavasi

$$b = \frac{c \times \text{tang}\, B}{R},$$

$$\text{l}b = \text{l}c + \text{l tang}\, B - \text{l}R;$$

ora, $lc = l\,5{,}391 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0{,}7316693$
l tang B = l tang $0^q,3502 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 9{,}7876255$

somma, ovvero $lc = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0{,}5192948$,
che risponde nelle *Tavole* a $3^m,306 = c$.

Esempî della risoluzione de' Triangoli obliquangoli.

Fig16. 1.° Conoscendo nel triangolo ABC, *fig.* 16, il lato *c* e gli angoli A e B, trovare il lato *b*.

Sia $A = 1^q,2805$, $B = 0^q,5879$, $c = 27^m,348$; l'angolo C sarà $2^q - (A+B) = 2^q - 1^q,8684 = 0^q,1316$, ed avremo (32)

$$\text{sen } C : \text{sen } B :: c : b.$$

di dove ricaveremo

$$b = \frac{c \times \text{sen } B}{\text{sen } C},$$

$$lb = lc + l\,\text{sen } B - l\,\text{sen } C;$$

ora, $lc = l\,27{,}348 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1{,}4369259$
l sen B = l sen $0^q,5879 = \ldots\ldots\ldots\ 9{,}9018394$
comp. arit. l sen C = comp. arit. l sen $0^q,1316 = 0{,}6877217$,

somma, ovvero $lb = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2{,}0264867$,
che risponde nelle *Tavole* a $106^m,289 = b$.

2.° Conoscendo nel triangolo ABC i due lati *a* e *b*, e l'angolo contenuto C, trovare il terzo lato *c*.

Sia $a = 28^m,442$, $b = 17^m,803$, $C = 0^q 8426$; cominceremo in primo luogo dal trovare gli altri angoli. Avremo (35)

$$a + b : a - b :: \text{tang}\,\frac{A+B}{2} : \text{tang}\,\frac{A-B}{2},$$

di dove

$$\text{tang}\,\frac{A-B}{2} = \frac{\left(\text{tang}\,\frac{A+B}{2}\right)(a-b)}{a+b},$$

e

$$l\,\text{tang}\,\frac{A-B}{2} = l\,\text{tang}\,\frac{A+B}{2} + l\,(a-b) - l\,(a+b),$$

ora, $A+B=2^q-C=2^q-0^q,8426=1^q,1574$, e $\frac{A+B}{2}=0^q,5787$,

$$a+b=28,442+17,803=46,245,$$
$$a-b=28,442-17,803=10,639,$$

$\mathrm{l}\tan\frac{A+B}{2}=\mathrm{l}\tan 0^q,5787=\ldots\ldots\ 0,1084874$

$\mathrm{l}(a-b)=\mathrm{l}\,10,639=\ldots\ldots\ldots\ 1,0269008$
comp. arit. $\mathrm{l}(a+b)=$ com. arit. $\mathrm{l}\,46,245=8,3349352$

somma, ovvero log tang $\frac{A-B}{2}=\ldots\ldots\ 9,4703234$,

che corrisponde a $0^q,1828$.

$$\text{Dunque } \frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=A=0^q,7615,$$

e $\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}=B=0^q,3959$.

Adesso per determinare il lato c, avremo la proporzione

$$\operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C :: b : c,$$

di dove

$$c=\frac{b\times\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B},$$

e $$\mathrm{l}c=\mathrm{l}b+\mathrm{l}\operatorname{sen} C-\mathrm{l}\operatorname{sen} B,$$

ora, $\mathrm{l}b=\mathrm{l}\,17,803=\ldots\ldots\ldots\ 1,2504932$
$\mathrm{l}\operatorname{sen} C=\mathrm{l}\operatorname{sen} 0^q,8426=\ldots\ldots\ 9,9865885$
comp. arit. $\mathrm{l}\operatorname{sen} B=$ comp. arit. $\mathrm{l}\operatorname{sen} 0^q,3959=0,2346572$

somma, ovvero $\mathrm{l}c=\ldots\ldots\ldots\ 1,4717399$,
che corrisponde nelle *Tavole* a $29^m,630=c$.

3.° Conoscendo nel triangolo ABC i tre lati a, b, c, trovar l'angolo A.

Sia $a=29^m,037$, $b=18^m,743$, $c=13^m782$.

Secondo il num.° 38, sommeremo i tre lati a, b, c, tra loro, il che darà 61,562; e dalla metà 30,781 toglieremo successivamente b e c; conseguiremo i resti 12,038 e 16,999 avremo in seguito

l 16,999 = ... 1,2304234
l 12,038 = ... 1,0805543
comp. arit. l 18,743 = ... 8,7271609
comp. arit. l. 13,782 = ... 8,8606878

somma 19,8988264,

la cui metà, ovvero l sen $\frac{1}{2}$ A = ... 9,9494132,

che nelle *Tavole* corrisponde a 0g ,6987 = $\frac{1}{2}$ A; dunque A = 1g ,3974.

40. Un' opera della natura di questa non potrebbe mai contenere tutti i casi particolari delle applicazioni di cui la Trigonometria rettilinea è capace; io mi limiterò ad indicare la soluzione di tre problemi, i quali si possono risguardare come la base dell'arte di levar di Pianta.

Ecco l'enunciato del primo.

Fig. 17. *Essendo data di grandezza e di posizione sopra un piano una linea retta* AB, fig. 17, *determinare, per rapporto a questa linea, la posizione d'un punto* C *situato nel medesimo piano, ovvero* (il che è lo stesso) *trovar le distanze* AC *e* BC.

Per risolverlo, fa di mestieri misurar la linea AB la quale è la base dell' operazione, e gli angoli CAB e CBA contenuti tra questa base e le rette, che uniscono le sue estremità col punto incognito C, le distanze cercate AC e BC si calcoleranno allora colla regola enunciata nel n.° 32; e tostochè le avremo trovate, costruiremo, mediante una *scala* di parti eguali, sui tre lati dati il triangolo ABC, il quale farà conoscere la posizion respettiva dei tre punti A, B e C(*).

(*) *Io non insisto punto sull' operazione della misura degli angoli perchè la vista degli istrumenti, che s' impiegano a tal effetto, insegna più di tutto ciò che può dirsi a questo riguardo; e per concepire la possibilità di questa misura basta immaginare che siasi posto nel punto A il centro d' un settore di circolo, di cui i raggi sieno diretti secondo i lati AB e AC dell' angolo, che ci proponghiamo di misurare. Quelli, che vorran dedicarsi alla pratica di* levar di pianta, *potran consultare il* Trattato di Trigo-

Potremo in seguito, mediante la risoluzione del triangolo rettangolo ACP, nel quale conosceremo il lato AC e l'angolo CAP, trovar la lunghezza della perpendicolare CP abbassata sopra AB, ovvero della più corta distanza dal punto C alla linea AB, e la grandezza del segmento AP. Questi dati serviran pure a denotare la posizione del punto C a riguardo della linea AB. Troverebbesi parimente la situazione d'un punto D, il quale potrebbesi vedere ad un tempo stesso da due qualunque dei tre punti A, B e C.

41. Allorchè si è determinato immediatamente il punto D per rapporto alla linea AB, misurando gli angoli DAB, DBA, abbiam tutto ciò ch'è necessario per conoscer la distanza scambievole dei punti C e D; poichè avendo risoluto il triangolo DAB, nello stesso modo che il triangolo CAB, e tolto in seguito l'angolo DAB dall'angolo CAB, si conoscono allora nel triangolo CAD i due lati AC e AD e l'angolo CAD, che dessi contengono: l'applicazion delle regole del n.° 35, somministra gli altri due angoli DCA, CDA ed il terzo lato CD, ch'è la distanza cercata. L'angolo DCA dà la posizione della retta CD; e considerando AC come secante, il paragone degli angoli DCA e CAB fa vedere qual sia l'inclinazion di CD a riguardo di AB.

Partendo dai punti C e D, e considerando allora la retta CD come una nuova base, potremo determinare dei nuovi punti, che non si potessero veder dai due primi A e B; e continuando così di mano in mano, fisseremo la posizion respettiva di tutti i punti d'un Paese. Con questo metodo è stata costrutta la *Carta* di Francia, diretta da *Cassini*.

42. Il secondo problema, di cui debbo occuparmi, non è altro che il primo reso più generale supponendo che il punto da determinarsi sia situato fuori del piano, sul quale si trova la linea AB. Sia C questo punto, ed ABC' il piano su cui giace la linea retta AB, *fig* 18. La posizione del punto C sarà cognita, se sarà cognita quella del Fig.18.

---

nometria di Cagnoli, *l'articolo* Levée des plans *nel* Dizionario di Matematiche dell'Enciclopedia Metodica, *il* Trattato d'Agrimensura *del* Sig. Lefevre, *e finalmente i* Trattati di Geodesia teorica e pratica *del Sig.* Puissant, *nei quali si trovano i metodi più esatti e più propri alle grandi operazioni trigonometriche, non meno che alle operazioni particolari.*

piede C' della perpendicolare abbassata da questo punto sul piano ABC' e la lunghezza della perpendicolare CC', la quale denota di quanto il punto C è elevato al disopra del punto C', il quale si nomina la sua *proiezione*. In questo caso gli angoli C'AB e C'BA non sono più quelli, che si misurano, ma si prendono in loro vece gli angoli CAB e CBA situati nel piano CAB, il quale passa per le linee AC e BC condotte dai punti dati A e B, al punto dimandato; e per fissare la posizione di questo piano misureremo inoltre l'angolo DBC formato dalla linea CB con la linea BD perpendicolare al piano ABC', ed in conseguenza paralella alla retta CC' (*). Si risolve il triangolo CBA come nel num.° precedente, poichè s' hanno anche adesso i medesimi dati; in seguito nel triangolo C'BC, rettangolo in C', si conoscono l' ipotenusa CB e l'angolo C'BC, il quale è la differenza tra l'angolo retto DBC', e l'angolo misurato DBC, onde si calcolano i lati CC' e C'B. Il primo è l'altezza del punto C al disopra del piano C'AB, e conduce, unitamente al lato AC, a determinare AC', per mezzo del triangolo CAC', rettangolo in C'. Ciò fatto si hanno i tre lati del triangolo C'AB, ed il punto C' è in conseguenza dato.

43. Per maggiore semplicità ho supposto la linea AB nel piano, al quale si riportano i punti da determinarsi allorchè poi detta linea non vi si trova, fa di mestieri os-
Fig. 19. servare di più l'angolo DBA, *fig.* 19, che dessa fa in questo caso con la linea DB perpendicolare al piano A'BC', sul quale vuol riportarsi il punto C. Ciò eseguito si calcolano in primo luogo, come qui soprà, i lati AC e BC del triangolo ABC, i lati CC' e C'B del triangolo rettangolo C'BC; poi nel triangolo BA'A, rettangolo in A', ove si conoscono AB e l'angolo ABA', complemento dell' angolo osservato DBA, si calcolano BA' ed AA'.

Adesso, se concepiscasi AC'' paralella ad A'C', ne resulterà il triangolo AC''C rettangolo in C'', nel quale co-

---

(*) *Quando si tratta di punti situati sulla superficie della Terra si sceglie per il piano ABC' un piano orizzontale; le rette CC' e BD sono allora* verticali; *la lor direzione è data da quella del* filo a piombo; *il piano C'CB, il quale passa per queste linee è verticale, e si trova determinato per mezzo del punto C, il quale scorgesi dal punto B e della linea DB. La linea C'B è una linea orizzontale giacente in questo piano.*

noscoremo AC, lato calcolato del triangolo ABC, e CC″ differenza tra le linee C′C″, ovvero AA′ e CC′ calcolate precedentemente: potremo in conseguenza calcolare AC″ ovvero A′C′. Ecco dunque il triangolo BA′C′ determinato per mezzo de' suoi tre lati, come lo è il triangolo BAC′ nel num.° precedente.

44. Prendendo a piacimento i lati BC ed AB, e seguendo l'andamento, che ho già tracciato, si può calcolare il triangolo A′C′B nella veduta di conoscer l'angolo C′BA′, formato dalle linee C′B e A′B, le quali sono nel piano A′BC′ le *proiezioni* de' raggi visuali BC e AB, condotte dal punto B ai punti A e C.

L'angolo C′BA′ compreso tra queste due *proiezioni* è l'angolo CBA *ridotto* dal piano inclinato, nel quale desso si trova, al piano A′BC′, sul qual si riportano gli oggetti, e che ordinariamente scegliesi orizzontale. Darò in seguito (62) un'altra maniera di ridurre un angolo da un piano ad un altro: ma il più spesso, siccome i due piani, che si considerano, son poco inclinati tra loro, si fa questa riduzione con dei metodi approssimativi molto più corti: di queste riduzioni ne sono state compilate altresì delle *Tavole.*

Per adesso mi limiterò a far notare che, se si osservassero nel punto A gli angoli EAC, EAB, e che col lor mezzo si riducessero l'angolo CAB all'angolo C′A′B, e che poi si calcolasse A′B, moltiplicando AB per il *coseno* dell'angolo DBA′ ovvero per il *seno* dell'angolo DBA: conoscendo allora immediatamente gli angoli C′BA′, C′A′B ed A′B, la determinazione del punto C′ rientrerebbe in ciò ch'è stato già detto nel n.° 40.

La *riduzione* al piano orizzontale non è la sola, che siavi da fare rispetto agli angoli osservati; raramente succede che uno possa porsi nei punti notabili, i quali si scelgono per vertici degli angoli, e che ordinariamente sono le punte dei campanili, delle torri ec.: da ciò ha origine una nuova *riduzione*, la quale si chiama *riduzione degli angoli al centro della stazione.* Fa di mestieri consultare sopra questo argomento, come sopra tutte le attenzioni minutissime, ch'esigono le grandi operazioni trigonometriche, l'opera del *Sig. Delambre* intitolata *Metodi analitici per la determinazione d'un arco di Meridiano*, ed i *Trattati* del *Sig. Puissant* di già sopra citati.

45. Il terzo problema, che debbo adesso risolvere, ha per oggetto la *determinazione d'un punto per mezzo dell'osservazione degli angoli compresi tra le rette condotte da*

questo punto a tre punti dati; e desso presentasi come uno dei mezzi più comodi per por sopra un piano, ovvero su d'una carta, un punto che non vi si trovi notato.

Allorchè si considera questo problema nel caso il più generale, desso riportasi alla Geometria dello spazio, ed io n'ho data la soluzione grafica nel *Complemento degli Elementi di Geometria*; ma quando i tre angoli sono in un medesimo piano, ve n'è sempre uno, ch'è la somma o la differenza degli altri due, di maniera che basta osservare questi ultimi per concludere il primo; ed a questo caso si posson ridurre gli altri servendosi della *riduzione* degli angoli al piano orizzontale, insegnata nel n.° 62.

La soluzione grafica di questo caso consiste nel descrivere sulle linee AB ed AC, *fig.* 20, che uniscono i tre punti dati A, B, C, due segmenti di circolo capaci degli angoli BDA, CDA osservati nel punto cercato D, tra i punti A e B, A e C. Le circonferenze dei circoli si taglieranno in primo luogo nel punto, ch'è stato loro reso comune dalla costruzione, ed in seguito nel punto D, il quale sarà evidentemente il punto cercato. Fig. 20.

Io non entrerò nella discussione dei differenti casi, che può presentare il problema relativamente alle diverse situazioni respettive dei punti dati A, B, C e del punto cercato D. Mi ristringerò solamente a far notare che la somma degli angoli osservati BDA, CDA indica se siam situati dentro o fuori del triangolo ABC. Nel primo caso dessa sorpassa due retti, nel secondo dessa è minore; e se dessa fosse precisamente eguale a due retti, saremmo posti sulla linea retta BC. Ciò è troppo facile a dimostrarsi perchè io non mi trattenga a provarlo.

Ecco una delle maniere d'applicare a questo problema il calcolo trigonometrico. I dati sono le parti del triangolo BAC, e gli angoli osservati BDA e CDA: farò in conseguenza

$$AB = a,\ AC = b,\ BDA = \alpha,\ CDA = \epsilon,\ BAC = \gamma,$$

e prenderò per incognite

$$ABD = x, \quad ACD = y,$$

perchè questi angoli essendo trovati, ne conosceremo due con un lato in ciascun dei triangoli BAD e DAC, dei quali potremo calcolare allora tutte le parti (34). Ciò posto, i triangoli BAD e DAC daranno

$$\text{sen BDA} : \text{sen ABD} :: AB : AD,$$
$$\text{sen CDA} : \text{sen ACD} :: AC : AD,$$

ovvero

$$\text{sen}\,\alpha : \text{sen}\,x :: a : AD = \frac{a \,\text{sen}\, x}{\text{sen}\,\alpha},$$

$$\text{sen}\,\epsilon : \text{sen}\,y :: b : AD = \frac{b \,\text{sen}\, y}{\text{sen}\,\epsilon};$$

concluderemo da ciò l'equazione

$$\frac{a \,\text{sen}\, x}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b \,\text{sen}\, y}{\text{sen}\,\epsilon},$$

la quale riducesi a

$$a \,\text{sen}\,\epsilon \,\text{sen}\, x - b \,\text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\, y = 0.$$

Ma nel quadrilatero ABDC si ha

$ACD = 4$ ang. retti $- ADB - ADC - BAC - ABD$;

di dove $y = 4$ ang. retti $- \alpha - \epsilon - \gamma - x$;

facendo, per abbreviare,

$$4 \text{ ang. retti} - \alpha - \epsilon - \gamma = \delta,$$

conseguiremo $y = \delta - x$, ed in conseguenza

$$a \,\text{sen}\,\epsilon \,\text{sen}\, x - b \,\text{sen}\, \alpha\, (\text{sen}\,\delta \cos x - \cos\delta \,\text{sen}\, x) = 0;$$

dividendo tutto per sen x, otterremo

$$a \,\text{sen}\,\epsilon - b \,\text{sen}\,\alpha \left(\text{sen}\,\delta \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} - \cos\delta\right) = 0;$$

di dove ne concluderemo

$$\frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = \cot x = \frac{a \,\text{sen}\,\epsilon + b \,\text{sen}\,\alpha \cos\delta}{b \,\text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\,\delta}.$$

Se si divida quest' espressione in due parti, avremo

$$\cot x = \frac{a \,\text{sen}\,\epsilon}{b \,\text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\,\delta} + \frac{\cos\delta}{\text{sen}\,\delta},$$

oppure

$$\cot x = \frac{\cos\delta}{\text{sen}\,\delta}\left(\frac{a \,\text{sen}\,\epsilon}{b \,\text{sen}\,\alpha \cos\delta} + 1\right),$$

ovvero finalmente

$$\cot x = \cot\delta \left(\frac{a \,\text{sen}\,\epsilon}{b \,\text{sen}\,\alpha \cos\delta} + 1\right).$$

Ecco il problema risoluto, poichè, mediante l'angolo x, si ha l'angolo y.

Nota sulla Livellazione.

E' utile osservare come col mezzo del triangolo rettangolo ABA', fig. 19, siasi determinata nel n.° 43 l' altezza AA' del punto A al disopra del punto A', che gli corrisponde nel piano A' C' B, perchè se quest' ultimo è orizzontale, la linea AA' è la differenza di livello *tra il punto A ed il medesimo piano, ed in conseguenza anco tra il punto A ed il punto B.*

Fig. 19.

L' operazione, la qual fa conoscere questa differenza, si dice Livellazione: *dessa eseguiscesi in più maniere secondo la natura degli istrumenti, che vi s' impiegano, e l' estension degli spazi, che vi si considerano; ma il suo fine è sempre quello di* determinare di quanto un punto è più elevato, ovvero più basso d' un altro nel senso verticale, oppure perpendicolarmente alla superficie terrestre. *Esistono dei Trattati speciali di livellazione, ai quali rimanderò il lettore; ma deggio avvertire che sin da che si possiede nel* Circolo ripetitore *un istrumento portatile, proprio a misurare gli angoli con la maggiore esattezza, si può, com' io l' ho indicato nel n.° 43, trovare immediatamente la differenza di* livello *di due punti mediante la misura dell' angolo che fa con la verticale, che passa per uno di questi punti, la retta che gli unisce.*

Ho supposto nel Testo *le due rette DB ed AA' paralelle tra loro; ma questa circostanza non ha luogo per le verticali, se non che in un intervallo assai piccolo, a motivo della convessità della superficie terrestre. Supponendola sferica, ipotesi presso a poco esatta, le verticali concorreranno nel centro C, come lo dimostrano le linee AC e BC,* fig. 21*; la linea BA' perpendicolare a BD sarà solamente tangente al punto B della superficie terrestre, e la differenza di* livello, *secondo la difinizione data di sopra, sarà Aa, e non AA', e vale a dire la differenza tra i lati BC e AC del triangolo ABC, nel qual si conoscono il lato AB misurato, il lato BC eguale al raggio medio della Terra, ch' è di* 6 366 198 metri, *finalmente l' angolo B compreso tra questi lati, è* supplemento *dell' angolo osservato DBA. Ciò posto, se si prenda*

Fig. 21.

$$BC = a\,,\; AC = b\,,\; AB = c\,,$$

conseguiremo (36)

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B};$$

e siccome c *è sempre piccolissimo a riguardo di* a , *dò a quest' espressione la forma*

$$b = a\left\{1 + \frac{c^2 - 2ac\cos B}{a^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = a\left\{1 + \frac{2c}{a}\left(\frac{c}{2a} - \cos B\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Facendo in seguito, per abbreviare $\frac{c}{2a} - \cos B = m$

poi sviluppando per la formula del binomio , *otterremo*

$$b = a\left\{1 + \frac{2\,cm}{a}\right\}^{\frac{1}{2}} = a\left\{1 + \frac{cm}{a} - \frac{1}{2}\,\frac{c^2m^2}{a^2} + ec.\right\};$$

e la linea cercata Aa essendo eguale a b — a , *e supporrò* b = a + δ, *d'onde resulterà , dopo la riduzione,*

$$\delta = cm - \frac{1}{2}\,\frac{c^2m^2}{a} + ec.$$

La quantità m, *e le sue potenze si colcoleran facilmente col mezzo dei* logaritmi *prendendo* $\frac{c}{2a} = \cos B'$ *perchè allora*

$$\frac{c}{2a} - \cos B = \cos B' - \cos B = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(B + B')\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\,(B - B').$$

Quando l' angolo B è retto , la linea BA si confonde con BA' ; e se si consideri allora il punto α' , intersezione di BA' e del raggio AC, si ha c = *Bα'*, *e* δ *diverrà αα'*, *vale a dir la distanza tra il punto α' preso sulla tangente, ed il punto α, che gli corrisponde sulla superficie terrestre , ovvero la* differenza tra il livello apparente , ed il livello reale. *In questo caso* $m = \frac{c}{2a}$; *così*

$$\delta = \frac{c^2}{2a} - \frac{c^4}{8a^3} + ec.\ ,$$

il che fa conoscere la quantità , di cui la superficie terrestre s' abbassa al disotto della sua tangente a una distanza e dal punto di contatto.

Il più spesso riportasi in primo luogo il punto A in A' sulla tangente BA' ; di poi , a motivo della piccolezza dell' angolo C , si riguardan le rette AA' ed Aα' come confuse l'una coll' altra , e si prende per Aα la somma delle rette AA' ed αα'.

Possiam dispensarci dal misurare la distanza AB, purchè s' osservi l' angolo EAB nel medesimo tempo che l' angolo DBA. Si conoscono allora , nel triangolo ABC , i due angoli B e A , supplementi *degli angoli osservati , e si ha* (35)

$$\frac{b-a}{b+a}=\frac{tang\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{tang\,\frac{1}{2}\,(A+B)}.$$

Facendo , per abbreviare , $\dfrac{tang\,\frac{1}{2}\,(A-B)}{tang\,\frac{1}{2}\,(A+B)}=m$, ...

e $b=a+\delta$, *si trova*

$$\frac{\delta}{2a+\delta}=m\ ,\ ovvero\ \delta=\frac{2am}{1-m};$$

ora $\quad \dfrac{1}{1-m}=1+m+m^2+ec.$ (Elem. d'Algebra) :

dunque

$$\delta=2am(1+m+m^2+ec.);$$

serie convergentissima quando gli angoli A e B si avvicinano ad esser retti. Il più spesso servirà il primo termine 2am.

Quando s' opera con esattezza , fa di mestieri correggere gli angoli EAB e DBA dalla refrazione , *che provano i raggi di luce traversando l' aria da A fino a B; ma ho riportati principalmente i due precedenti problemi per servir d' esempio dell' applicazion delle* Serie *alla risoluzione approssimativa di certi casi dei triangoli rettilinei.*

CAPITOLO SECONDO

Della Trigonometria Sferica.

46. I triangoli sferici, che si calcolano ordinariamente, son quelli, che vengono circoscritti sulla superficie della Sfera da tre gran circoli i quali si tagliano due a due. Un di questi tali triangoli determina sempre un angolo *trièdro*, e reciprocamente da un simil angolo se ne deduce pure un triangolo sferico. Infatti, sia ABC, *fig.* 22, un triangolo Fig. 22.
sferico qualunque, e siansi condotti da ciascuno de' suoi angoli al centro della sfera, di cui detto triangolo fa parte, i raggi AS, BS, CS; i piani ABS, ACS, BCS, saranno quelli dei gran circoli, sui quali son presi gli archi AB, AC, BC, lati del proposto triangolo, e questi archi misurano gli angoli rettilinei compresi su ciascuna delle facce dell' angolo *trièdro* SABC tra le sue costole o spigoli SA e SB, SA e SC, SB e SC. L' inclinazion di due piani misurasi, come si sa, dall' angolo rettilineo formato da due rette condotte in ciascuno di questi piani da un medesimo punto della loro comune sezione perpendicolarmente a questa linea : segue da ciò che, se per il punto A si tirin le rette AI ed AK, ambedue perpendicolari ad AS, ma la prima nel piano CAS, e la seconda nel piano BAS, l' angolo rettilineo IAK misurerà l' inclinazione di questi due piani. È facil vedere d' altronde che la linea AI sarà tangente dell' arco AC, e che AK sarà tangente dell' arco AB; e siccome si prende per l' angolo, che forman due linee curve, quello che comprendono le due tangenti condotte dal punto ove dette curve s' incontrano, l' angolo IAK sarà dunque anco la misura dell' angolo fatto dagli archi AC, ed AB. Sarebbe lo stesso a riguardo di ciascuno degli altri due angoli del triangolo; le inclinazioni delle facce dell' angolo *trièdro* SABC hanno dunque la medesima misura che l' angolo corrispondente del triangolo sferico BAC. Il triangolo sferico, e l' angolo *trièdro* son composti in conseguenza di sei parti, le quali si corrispondon tra loro, cioè i tre lati del triangolo, i quali corrispondono agli angoli formati dalle costole dell' angolo *trièdro*, e i tre angoli del

triangolo, che corrispondono alle inclinazioni scambievoli delle facce del triangolo *triedro*.

Eulero, il quale si è occupato a più riprese della Trigonometria sferica affine di presentarla sotto dei nuovi punti di vista, ha dato nel 1779 (*) una *Memoria*, la quale si può riguardare come un Trattato completo di questo ramo delle Matematiche. La sua forma interamente analitica mi ha impegnato a presentarla a' miei lettori facendovi i cangiamenti necessarî per non l'appoggiare che ad un solo principio, e semplicizzarne alcuni resultati.

47. Tutto ciò, che ho da dire sui triangoli sferici, riposa unicamente sulla costruzione seguente, la quale in conseguenza è importante di ben intendere.

Dall' angolo C del triangolo ABC si abbassi una perpendicolare CD sul piano ASB dal lato BA opposto a quest' angolo : dal punto D si conducano le linee rette ED, DF respettivamente perpendicolari sopra SA e SB; si tirino le linee CE e CF, le quali saranno respettivamente perpendicolari alle linee SA e SB (*Geom.*). Segue da ciò che gli angoli CED e CFD misurano le inclinazioni dei piani CSA e CSB, sul piano ASB, ovvero, ch'è la stessa cosa, danno il valore degli angoli A e B del triangolo sferico ABC. Denoterò d' ora in avanti gli angoli di questi triangoli colla lettera posta al lor vertice, ed i lati, che ai medesimi son opposti, con una lettera simile, ma presa nell' alfabeto minuscolo: qui, come nel n.° 31, il lato BC opposto all' angolo A si chiamerà a, e così degli altri. Il raggio delle *Tavole* essendo supposto eguale all' unità, avremo allora

$$CE = \text{sen } CA = \text{sen } b,\quad SE = \cos CA = \cos b,$$
$$CF = \text{sen } CB = \text{sen } a,\quad SF = \cos CB = \cos a.$$

Nel triangolo rettilineo CDE, rettangolo in D, e di cui l' angolo CED = A, troveremo

$$CD = CE \text{ sen } CED = \text{sen } b \text{ sen } A,$$
$$DE = CE \cos CED = \text{sen } b \cos A.$$

Per mezzo del triangolo rettilineo CDF, parimente rettangolo in D, e di cui l' angolo CDF = B, otterremo

(*) *Acta Academiae scientiarum Petropolitanae*, anni 1779, *Pars prior*; vedete pure lo *Sviluppo della parte elementare delle Matematiche di Bertrand*, Ginevra 1778 (T. II, pag. 576).

$$CD = CF \text{ sen } CFD = \text{sen } a \text{ sen } B;$$
$$DF = CF \cos CFD = \text{sen } a \cos B.$$

Le due espressioni della linea CD essendo eguagliate tra loro, danno immediatamente

$$\text{sen } b \text{ sen } A = \text{sen } a \text{ sen } B \ldots\ldots (A);$$

resultato, ch'è, per rapporto ai triangoli sferici, analogo a quello del n.° 32.

È manifesto che si debbono avere ancora le due equazioni seguenti:

$$\text{sen } c \text{ sen } A = \text{sen } a \text{ sen } C,$$
$$\text{sen } c \text{ sen } B = \text{sen } b \text{ sen } C.$$

Adesso pel punto E conduco EG perpendicolare sopra SB, e pel punto D tiro DH paralella a SB: formo in questa maniera un triangolo rettangolo HDE, nel quale HED = ASB, poichè togliendo l'angolo GES dall'angolo retto SED, si ha per resto HED; e l'angolo ASB, ovvero ESG è pure la differenza tra un angolo retto, e l'angolo GES. Dalla risoluzion del triangolo EHD dedurremo per conseguenza

$HD = DE \text{ sen } DEH = DE \text{ sen } c = \cos A \text{ sen } b \text{ sen } c;$
ma $SF = \cos a = SG + GF = SG + HD$, e $SG = SE \cos ESG = \cos b \cos c$; avrem dunque

$$\cos a = \cos b \cos c + \cos A \text{ sen } b \text{ sen } c;$$

equazione, ch'esprime la relazione, ch'esiste tra il lato a, gli altri due lati b e c e l'angolo, ch'essi contengono.

È chiaro che considerando in particolare ciascun di questi ultimi lati, troverem parimente due equazioni simili alla precedente, e formeremo in tal maniera tra le sei parti del triangolo ABC le tre equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cos c + \cos A \text{ sen } b \text{ sen } c\\ \cos b = \cos a \cos c + \cos B \text{ sen } a \text{ sen } c\\ \cos c = \cos a \cos b + \cos C \text{ sen } a \text{ sen } b\end{array}\right\} \ldots (B).$$

48. Queste tre equazioni contengono implicitamente l'equazioni (A). Per convincersene è duopo prendere i valori, che desse danno per cos A, cos B, cos C, e sostituirli nell' equazioni

$$\text{sen } A^2 = 1 - \cos A^2$$
$$\text{sen } B^2 = 1 - \cos B^2$$
$$\text{sen } C^2 = 1 - \cos C^2.$$

Si trova per la prima di queste

$$\text{sen A}^2 = 1 - \frac{\cos a^2 - 2\cos a \cos b \cos c + \cos b^2 \cos c^2}{\text{sen } b^2 \text{ sen } c^2} =$$

$$\frac{\text{sen } b^2 \text{ sen } c^2 - \cos a^2 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos b^2 \cos c^2}{\text{sen } b^2 \text{ sen } c^2} =$$

$$\frac{(1-\cos b^2)(1-\cos c^2) - \cos b^2 \cos c^2 - \cos a^2 + 2\cos a \cos b \cos c}{\text{sen } b^2 \text{ sen } c^2} =$$

$$\frac{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}{\text{sen } b^2 \text{ sen } c^2};$$

moltiplicando i due termini di questa frazione per sen a^2, e prendendo in seguito la radice quadrata, otterremo

$$\text{sen A} = \text{sen } a \times \frac{\sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}}{\text{sen } a \text{ sen } b \text{ sen } c}.$$

Se, affin d'abbreviare, si rappresenti per M la quantità, che moltiplica sen a nel secondo membro di quest'equazione, avremo

$$\text{sen A} = \text{M sen } a;$$

troverem parimente

$$\text{sen B} = \text{M sen } b, \quad \text{sen C} = \text{M sen } c,$$

e, per l'eliminazione di M, ricaderemo sull'equazione (A). È a proposito l'osservare che i tre lati a, b, c entrano tutti della stessa maniera nell'espressione di M; poichè egli è per questa ragione che detta espressione è comune ai valori dei *seni* di ciascuno degli angoli (*).

(*) *Denotando per N il numeratore della quantità M, per* γ, $\mathfrak{c}$, α, *tre costole contigue d'un* tetraedro *qualunque, e per* a, b, c *i tre angoli, che desse formano, resulta da una* Memoria d'Eulero *che il volume di questo* tetraedro *è eguale a* $\frac{1}{3}\,\alpha\mathfrak{c}\gamma \times \frac{1}{2}\,N$, *e che* $\frac{1}{2}\,N$ *riducesi a*

$$\sqrt{sen\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,sen\,\tfrac{1}{2}(a+a-c)\,sen\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)\,sen\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)}.$$

Nel tetraedro *SABC* $\alpha = \mathfrak{c} = \gamma = 1$; *il suo volume è dunque eguale a* $\frac{1}{6}$ *N.* (*Vedete i* Novi Commentarii Acad. Petropolitanae *T.° IV*, pag. 160, *ed il sesto Quaderno del* Giornale della Scuola Politecnica *pag.* 270.

L'equazioni (B) serviranno dunque per risolver un triangolo sferico qualunque siasi allorchè si conosceranno tre delle sue parti, osservando che il *seno* e il *coseno* non debbon essere risguardati che come una sola incognita, poichè si può sempre esprimer l'uno per l'altro.

L'applicazione dell'equazioni (B) ai differenti casi, che possono presentarsi, divien più facile mediante alcune trasformazioni, che vado ad effettuare.

49. Si possono cangiare gli angoli nei lati, che sono a loro opposti e reciprocamente, osservando di dare il segno — ai *coseni*. Per dimostrarlo fa di mestieri eliminare $\cos a$ dalle due ultime equazioni col mezzo della prima; troveremo

$$\cos b = \cos b \cos c^2 + \cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos c + \cos B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c,$$
$$\cos c = \cos b^2 \cos c + \cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos b + \cos C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Sostituendo in questi resultati $1 - \operatorname{sen} c^2$ a $\cos c^2$, $1 - \operatorname{sen} b^2$ a $\cos b^2$, i medesimi si riducon più semplici; il primo divien divisibile per $\operatorname{sen} c$, il secondo per $\operatorname{sen} b$, ed essi possono in seguito scriversi nel modo seguente

$$\left.\begin{array}{l}\cos B \operatorname{sen} a = \cos b \operatorname{sen} c - \cos A \operatorname{sen} b \cos c \\ \cos C \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \cos c - \cos A \cos b \operatorname{sen} c\end{array}\right\} \ldots (C).$$

Se si moltiplichi la seconda di queste equazioni per $\cos A$, poi si sommi colla prima e vi si sostituisca $1 - \operatorname{sen} A^2$ in luogo di $\cos A^2$, otterremo

$$\operatorname{sen} a (\cos B + \cos A \cos C) = \operatorname{sen} A^2 \cos b \operatorname{sen} c;$$

ma segue dall'equazioni (A) che $\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C$; facendo la sostituzione di questo valore nel secondo membro dell'equazione di sopra, essa diverrà divisibile per $\operatorname{sen} a$, ed avremo per resultato

$$\cos B + \cos A \cos C = \cos b \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C,$$

ovvero, ch'è la stessa, cosa,

$$\cos B = -\cos A \cos C + \cos b \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C.$$

Paragonando quest'equazione coll'equazioni (B), si vede ch'essa dedurrebbesi immediatamente dalla seconda cangiando le lettere grandi in piccole, e reciprocamente, e dando a tutti i *coseni* il segno —. Difatto, operando di tal maniera, s'ottiene

$$-\cos B = \cos A \cos C - \cos b \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C;$$

equazione, la quale riducesi alla precedente allorchè vi si cangiano tutti i segni.

La relazione, che ha l'angolo B coi due angoli A C, ed il lato b, che dessi intercettano, esiste necessariamente in ciascuna delle combinazioni simili d'angoli e di lati: si hanno dunque nel medesimo tempo le tre equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = -\cos B \cos C + \cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \\ \cos B = -\cos A \cos C + \cos b \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \\ \cos C = -\cos A \cos B + \cos c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B\end{array}\right\} \ldots (B').$$

50. Bisogna osservare che prendendo i *coseni* negativamente si passa dagli archi a, b, c, e dagli angoli A, B, C ai lor *supplementi*, poichè $-\cos A = \cos(2q - A)$, $-\cos a = \cos(2q - a)$, e così degli altri (23). Se si sostituiscano questi valori nell'equazioni di sopra, facendo, per abbreviare, $2q - A = A'$, $2q - a = a'$, ec., esse prenderanno la forma

$$\left.\begin{array}{l}\cos A' = \cos B' \cos C' + \cos a' \operatorname{sen} B' \operatorname{sen} C' \\ \cos B' = \cos A' \cos C' + \cos b' \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} C' \\ \cos C' = \cos A' \cos B' + \cos c' \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} B'\end{array}\right\};$$

equazioni perfettamente simili all'equazioni (B), e che appartengono in conseguenza ad un triangolo sferico, i cui lati sono A', B', C', e gli angoli a', b', c'. Un tal triangolo ha dunque i suoi angoli misurati dai *supplementi* dei lati del triangolo ABC, ed i suoi lati misurano i *supplementi* degli angoli del medesimo triangolo: desso è denotato nei libri di Trigonometria sotto il nome di *triangolo supplementario*, e si dimostra che i vertici de' suoi angoli sono i *poli* dei lati del primo, e viceversa.

51. L'equazioni ottenute nel n.° 49 sotto la designazione (C), le quali contengono cinque parti del triangolo sferico ABC, possono trasformarsi in altre, che non ne contengono più che quattro. Bisogna per questo sostituire in luogo di sen a nella prima $\frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$, e nella seconda $\frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$ (47); e siccome $\frac{\cos p}{\operatorname{sen} p} = \cot p$, troveremo allora

$$\left.\begin{array}{l}\cot B = \dfrac{\cos b \operatorname{sen} c - \cos A \operatorname{sen} b \cos c}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b} \\[2ex] \cot C = \dfrac{\operatorname{sen} b \cos c - \cos A \cos b \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} c}\end{array}\right\} \ldots (D).$$

È facile di formare, coll' ispezione di questi valori, tutti quelli, che son loro analoghi, permutandovi le lettere in una maniera convenevole; ma importa soprattutto osservare che, poichè dessi sono dedotti dall' equazioni (B), vi potremo cangiare della maniera medesima che in quest' ultime i lati in angoli, e reciprocamente, dando ai *coseni* ed alle *cotangenti* il segno contrario a quello, che dessi hanno, e otterremo

$$\left.\begin{aligned} \cot b &= \frac{\cos B \operatorname{sen} C + \cos a \operatorname{sen} B \cos C}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B} \\ \cot c &= \frac{\operatorname{sen} B \cos C + \cos a \cos B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} C} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (D')$$

52. I cinque *sistemi* d' equazioni (A), (B), (B'), (D), (D') somministrano immediatamente la risoluzione di tutti i casi, che può offrire un triangolo sferico qualunque siasi. Il primo *sistema* esprime la relazione, ch'esiste tra gli angoli, ed i lati opposti.

53. Ricavansi dal secondo le sei formule seguenti

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \cos A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \\ \cos b &= \cos a \cos c + \cos B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \\ \cos c &= \cos a \cos b + \cos C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} \\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \end{aligned}\right\},$$

di cui le tre prime fanno conoscere un lato col mezzo degli altri due e dell' angolo, ch' essi contengono, e di cui le tre ultime danno gli angoli per mezzo dei lati.

54. Il terzo *sistema* produce, come il precedente, sei formule, le quali sono

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c \end{aligned}$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}.$$

Le tre prime faran trovare un angolo allorchè si conosceran gli altri due, ed il lato intercettato tra loro: le tre ultime daranno ciascuno de'lati allorchè tutti gli angoli saranno cogniti.

55. Il quarto *sistema*, facendovi tutte le permutazioni possibili, somministra le sei formule.

$$\cot A = \frac{\cos a \operatorname{sen} b - \cos C \operatorname{sen} a \cos b}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} a}$$

$$\cot B = \frac{\operatorname{sen} a \cos b - \cos C \cos a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} b}$$

$$\cot A = \frac{\cos a \operatorname{sen} c - \cos B \operatorname{sen} a \cos c}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a}$$

$$\cot C = \frac{\operatorname{sen} a \cos c - \cos B \cos a \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} c}$$

$$\cot B = \frac{\cos b \operatorname{sen} c - \cos A \operatorname{sen} b \cos c}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b}$$

$$\cot C = \frac{\operatorname{sen} b \cos c - \cos A \cos b \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} c}.$$

per mezzo delle quali si determineranno due degli angoli d'un triangolo sferico allorchè si conosceranno il terzo angolo ed i lati, che lo contengono.

56. Il quinto *sistema* finalmente conduce alle sei formule seguenti

$$\cot a = \frac{\cos A \operatorname{sen} B + \cos c \operatorname{sen} A \cos B}{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}$$

$$\cot b = \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos c \cos A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} B}$$

$$\cot a = \frac{\cos A \operatorname{sen} C + \cos b \operatorname{sen} A \cos C}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A}$$

$$\cot c = \frac{\text{sen } A \cos C + \cos b \cos A \text{ sen } C}{\text{sen } b \text{ sen } C}$$

$$\cot b = \frac{\cos B \text{ sen } C + \cos a \text{ sen } B \cos C}{\text{sen } a \text{ sen } B}$$

$$\cot c = \frac{\text{sen } B \cos C + \cos a \cos B \text{ sen } C}{\text{sen } a \text{ sen } C},$$

le quali serviranno a determinare due de'lati d' un triangolo quando si conosceranno il terzo e i due angoli tra i quali è frapposto.

57. Le formule concluse dai *sistemi* (B), (B'), (D) e (D'), (53, 56) meritano la più grande attenzione tanto per la loro eleganza quanto ancora per la propietà, ch' esse hanno, di far conoscere se l' arco, ovvero l' angolo, che desse esprimono, sia minore o maggior d' un quadrante ovvero d' un angolo retto; proprietà che non avrebbero l' espressioni dei *seni* dei medesimi archi. Infatti, il *seno* d' un arco essendo lo stesso che quello del *supplemento* di quest'arco, tanto per il suo valore, che per il suo segno, ogni qualvolta che non si conosca che il *seno* d' un arco, non è possibile di saper se quest' arco debb' essere minore, o maggior d' un quadrante; ma allorchè abbiamo il *coseno*, o la *cotangente*, e che si sa d'altronde che quest'arco non può esser eguale alla semicirconferenza, ch'è il caso de'lati dei triangoli sferici e degli archi, che misurano i loro angoli, si vede dal segno del resultato se l' arco cercato sia compreso o nò tra 1^q e 2^q; il *coseno* e la *cotangente* hanno il segno — nel primo caso, ed il segno + nel secondo. Se dunque si ha cura di dare alle quantità cognite, ch' entrano nelle formule riportate qui sopra, i segni, dai quali debbon esser affette dietro al valore degli archi, ai quali appartengono, il segno del resultato farà couoscere la *specie* del lato o dell'angolo cercato, e vale a dire, se desso sia minore o maggior d'un quadrante, se desso sia acuto ovvero ottuso.

58. Queste medesime formule molto si semplicizzano allorchè il triangolo proposto è rettangolo, vale a dire allorchè uno dei suoi angoli è retto. Difatto, se si supponga che $C = 1^q$, avremo.

$$\text{sen } C = 1, \quad \cos C = 0,$$

ed otterremo

$$\cos c = \cos a \cos b \ (53)$$

$$\cos c = \frac{\cos A \cos B}{\text{sen} A \,\text{sen} B} = \cot A \cot B \ (54)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = \text{sen} B \cos a \\ \cos B = \text{sen} A \cos b\end{array}\right\} (54)$$

$$\text{sen}\, a = \text{sen}\, c\ \text{sen} A,\ \text{sen}\, b = \text{sen}\, c\ \text{sen} B\ (47)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cot b = \dfrac{\cos B}{\text{sen}\, a\ \text{sen} B} \\ \cot a = \dfrac{\cos A}{\text{sen}\, b\ \text{sen} A} \\ \cot c = \dfrac{\cos b \cos A}{\text{sen}\, b} \\ \cot c = \dfrac{\cos a \cos B}{\text{sen}\, a}\end{array}\right\} (56),\ \text{di dove}\ \left\{\begin{array}{l}\text{tang}\, b = \text{sen}\, a\ \text{tang} B \\ \text{tang}\, a = \text{sen}\, b\ \text{tang} A \\ \text{tang}\, b = \cos A\ \text{tang}\, c \\ \text{tang}\, a = \cos B\ \text{tang}\, c;\end{array}\right.$$

e non prendendo tra queste formule se non che quelle, che differiscono essenzialmente, avremo le sei, che seguono

$$\cos c = \cos a \cos b$$
$$\cos c = \cot A \cot B$$
$$\text{sen}\, a = \text{sen}\, c\ \text{sen} A$$
$$\text{tang}\, a = \text{sen}\, b\ \text{tang} A$$
$$\text{tang}\, a = \cos B\ \text{tang}\, c$$
$$\cos A = \text{sen} B \cos a,$$

le quali pei cangiamenti, di cui son suscettibili, serviran per risolvere i triangoli sferici rettangoli in C, in cui il lato *c*, opposto all'angolo retto, chiamasi *ipotenusa*, come nei triangoli rettilinei. Si otterrebbero delle formule analoghe pel caso ove il triangolo sferico proposto avesse un dei suoi lati eguale al quadrante; ma non mi tratterrò sopra questo caso.

59. Affin di poter applicare comodamente i *logaritmi* ai calcoli dei triangoli sferici, fà di mestieri trasformare le formule dei num.[i] 53, e 54 in altre, di cui il numeratore ed il denumeratore sien decomposti in fattori; questo è ciò, ch' *Euler* ha fatto in una maniera quanto semplice altrettanto elegante.

1.° Dall' espressione $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen } b \text{ sen } c}$ compresa tra quelle del n.° 53, ricavasi

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\text{sen } b \text{ sen } c} \quad (11)$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\text{sen } b \text{ sen } c};$$

dal che ne segue, a motivo di $\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \text{tang } \frac{1}{2} A^2$ (27):

$$\text{tang } \frac{1}{2} A^2 = \frac{\cos b - c) - \cos a}{\cos a - \cos(b+c)};$$

ma $\cos p - \cos q = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}(p+q) \text{sen } \frac{1}{2}(p-q)$ (27);

dunque $\text{tang } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen } \frac{1}{2}(b-c+a) \text{sen } \frac{1}{2}(b-c-a)}{\text{sen } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{sen } \frac{1}{2}(a-b-c)}}.$

Operando nella stessa maniera sulle altre espressioni del medesimo n.° 53, arriveremo a dei resultamenti consimili.

2.° Prendendo nel n.° 54 l' espressione

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\text{sen } B \text{ sen } C},$$

se ne deduce

$$1 - \cos a = \frac{\cos(B+C) + \cos A}{\text{sen } B \text{ sen } C},$$

$$1 + \cos a = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\text{sen } B \text{ sen } C},$$

donde $\text{tang } \frac{1}{2} a^2 = \frac{\cos(B+C) + \cos A}{\cos(B-C) + \cos A}$,

ma $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$ (27):

$$\text{dun.}^{e}\ \tang \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(B+C+A)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(B-C+A)\cos\frac{1}{2}(B-C-A)}};$$

formula, che il segno — del numeratore non rende *immaginaria* perchè l'arco $A+B+C$, sorpassando un quadrante, ha il suo coseno negativo (*).

(*) Euler, *all'effetto di dare maggior uniformità ai suoi resultati, impiega sempre le tangenti degli archi da determinare; ma si può, in ciò che precede, arrivare un poco più semplicemente al seno.*

1.° *Si ha* $1 - \cos A = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}A^2$ (27), *e per la formula*

$$\cos p - \cos q = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(p+q)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(p-q)$$

si trova

$$\cos(b-c) - \cos a = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(b-c+a)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(b-c-a),$$

ovvero, cangiando il segno dell'arco $b-c-a$ *e del suo seno*,

$$\cos(b-c) - \cos a = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(a+c-b);$$

ponendo questi valori in quello di $1-\cos A$, *e prendendo la radice quadra di ciascun membro, si ottiene*

$$\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(a+e-b)}{\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,c}}.$$

2.° *Se si osserva parimente che*

$$1 - \cos a = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}a^2,$$

e che l'espressione di $\cos p + \cos q$ *dà*

3.° L'espressioni del n.° 53 danno pure

$$\cos a - \cos b \cos c = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A,$$
$$\cos b - \cos a \cos c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B;$$

e dividendo la prima di queste equazioni per la seconda, e osservando che dietro l'equazione (A) si ha

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},$$

troveremo

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\operatorname{sen} B \cos A}{\operatorname{sen} A \cos B}.$$

Se in seguito aggiungasi l'unità a ciascun membro di quest'ultima equazione, essa diverrà

$$1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} = 1 + \frac{\operatorname{sen} B \cos A}{\operatorname{sen} A \cos B},$$

e la cangerem facilmente in

$$\frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\operatorname{sen} A \cos B}$$

mediante la riduzione dei due termini di ciascun membro al medesimo denominatore.

Togliendo l'unità in vece di aggiungerla, avremo

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\cos b - \cos a \cos c} - 1 = \frac{\operatorname{sen} B \cos A}{\operatorname{sen} A \cos B} - 1;$$

di dove ricaveremo

$$\frac{(\cos a - \cos b)(1 + \cos c)}{\cos b - \cos a \cos c} = \frac{\operatorname{sen}(B-A)}{\operatorname{sen} A \cos B}.$$

$$\cos(B+C) + \cos A = 2\cos\tfrac{1}{2}(B+C+A) + \cos\tfrac{1}{2}(B+C-A),$$

troveremo

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}$$

Dividendo questo resultato pel precedente otterremo

$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} \times \frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \frac{\operatorname{sen}(B - A)}{\operatorname{sen}(B + A)};$$

e siccome stando alla *Tavola* della pag. 27,

$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+a)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-a),$$

$$\frac{1 + \cos c}{1 - \cos c} = \cot\frac{1}{2}c^2,$$

$$\operatorname{sen} p = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}p,$$

troveremo

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-a)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b+a)\cot\frac{1}{2}c^2$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B-A)\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B+A)\cos\frac{1}{2}(B+A)} \ldots\ldots (a).$$

Ma aggiungendo e togliendo successivamente l'unità da ciascuno dei membri dell' equazione $\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$, poi dividendo i due resultati l'uno per l'altro arrivasi all'equazione

$$\frac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} A},$$

la quale può essere trasformata così

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(b-a)\cot\frac{1}{2}(b+a) = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B-A)\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B+A)\cos\frac{1}{2}(B-A)}$$

col mezzo delle formule della pag. 27; moltiplicando dunque tra loro membro per membro questa equazione e l'equazione (a), ed osservando che

$$\tang \frac{1}{2}(b+a)\cot\frac{1}{2}(b+a)=1 \text{ (9)},$$

otterremo

$$(\tang\frac{1}{2}(b-a))^2\cot\frac{1}{2}c^2=\frac{(\sen\frac{1}{2}(B-A))^2}{(\sen\frac{1}{2}(B+A))^2};$$

estraendo la radice da ciascun membro, conseguiremo

$$\tang\frac{1}{2}(b-a)\cot\frac{1}{2}c=\frac{\sen\frac{1}{2}(B-A)}{\sen\frac{1}{2}(B+A)};$$

dividendo l'equazione (a), per quest' ultima, avremo

$$\tang\frac{1}{2}(a+b)\cot\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}.$$

Rammentandosi $\frac{1}{\cot p}=\tang p$ (9), dedurremo dalle due equazioni di sopra l'espressioni

$$\tang\frac{1}{2}(b-a)=\tang\frac{1}{2}c\frac{\sen\frac{1}{2}(B-A)}{\sen\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\tang\frac{1}{2}(b+a)=\tang\frac{1}{2}c\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)},$$

che faran conoscere due lati d'un triangolo sferico, del quale avremo il terzo lato ed i due angoli, ch'esso intercetta; poichè denotando per b' ed a' i valori degli archi $b+a$ e $b-a$, ne resulta

$$b=\frac{1}{2}(b'+a'),\quad a=\frac{1}{2}(b'-a').$$

4.° Prendendo ancora nel n.° 54 l'equazioni

$$\cos A+\cos B\cos C=\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos a,$$
$$\cos B+\cos A\cos C=\operatorname{sen} A\operatorname{sen} C\cos b,$$

e dividendo la prima per la seconda, troveremo

$$\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\cos B+\cos A\cos C}=\frac{\operatorname{sen} B\cos a}{\operatorname{sen} A\cos b}=\frac{\operatorname{sen} b\cos a}{\operatorname{sen} a\cos b}.$$

Sommando e sottraendo successivamente l'unità da ciascuno dei membri di quest'ultima, poi dividendo i resultati l'uno per l'altro, ne concluderemo, come di sopra,

$$\frac{\cos A-\cos B}{\cos A+\cos B}\times\frac{1-\cos C}{1+\cos C}=\frac{\operatorname{sen}(b-a)}{\operatorname{sen}(b+a)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-A)\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+A)\operatorname{tang}\frac{1}{2}C^2$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+a)\cos\frac{1}{2}(b+a)}\;\ldots\ldots\;(b);$$

e siccome l'equazione $\frac{\operatorname{sen} b-\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} a}=\frac{\operatorname{sen} B-\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} A}$ impiegata nella trasformazion precedente, può scriversi così

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-A)\cot\frac{1}{2}(B+A)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-a)\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+a)\cos\frac{1}{2}(b-a)};$$

moltiplicando, e dividendo per quest'ultima l'equazione (b), trovasi finalmente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-A)=\cot\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tang\frac{1}{2}(B+A)=\cot\frac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)};$$

formule, le quali rimpiazzeranno le precedenti allorchè conosceremo due lati e l'angolo, ch'essi comprendono.

60. Prendendo tutte le variazioni, di cui le formule trovate qui sopra son suscettibili, avremo

$$\tang\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

$$\tang\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}}$$

$$\tang\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}}$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}\ (*)$$

$$\operatorname{tang}\frac{b-a}{2}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B-A)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\operatorname{tang}\frac{b+a}{2}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\operatorname{tang}\frac{c-b}{2}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\operatorname{tang}\frac{c+b}{2}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\,\frac{\cos\frac{1}{2}(C-B)}{\cos\frac{1}{2}(C+B)}$$

$$\operatorname{tang}\frac{a-c}{2}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+C)}$$

$$\operatorname{tang}\frac{a+c}{2}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}$$

(*) *Per ricavar queste formule dalle loro analoghe del num° precedente, fa di mestieri osservare che* $\alpha-\zeta-\gamma=\alpha-(\zeta+\gamma)$, *e sen* $(p-q)=-$ *sen* $(q-p)$, *cos* $(p-q)=$ *cos* $(q-p)$.

$$\tang \frac{B-A}{2} = \cot \frac{1}{2} C \frac{\sen \frac{1}{2}(b-a)}{\sen \frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tang \frac{B+A}{2} = \cot \frac{1}{2} C \frac{\cos \frac{1}{2}(b-a)}{\cos \frac{1}{2}(b+a)}$$

$$\tang \frac{C-B}{2} = \cot \frac{1}{2} A \frac{\sen \frac{1}{2}(c-b)}{\sen \frac{1}{2}(c+b)}$$

$$\tang \frac{C+B}{2} = \cot \frac{1}{2} A \frac{\cos \frac{1}{2}(c-b)}{\cos \frac{1}{2}(c+b)}$$

$$\tang \frac{A-C}{2} = \cot \frac{1}{2} B \frac{\sen \frac{1}{2}(a-c)}{\sen \frac{1}{2}(a+c)}$$

$$\tang \frac{A+C}{2} = \cot \frac{1}{2} B \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c)}{\cos \frac{1}{2}(a+c)}$$

Dalle dodici ultime formule si deducono le seguenti, le quali servono a trovare il terzo angolo, ovvero il terzo lato d'un triangolo, nel quale si conoscon due lati, e gli angoli opposti:

$$\tang \frac{1}{2} c = \tang \frac{1}{2}(b-a) \frac{\sen \frac{1}{2}(B+A)}{\sen \frac{1}{2}(B-A)}$$

$$\tang \frac{1}{2} c = \tang \frac{1}{2}(b+a)\frac{\cos\frac{1}{2}(B+A)}{\cos\frac{1}{2}(B-A)}$$

$$\tang \frac{1}{2} a = \tang \frac{1}{2}(c-b)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C-B)}$$

$$\tang \frac{1}{2} a = \tang \frac{1}{2}(c+b)\frac{\cos\frac{1}{2}(C+B)}{\cos\frac{1}{2}(C-B)}$$

$$\tang \frac{1}{2} b = \tang \frac{1}{2}(a-c)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-C)}$$

$$\tang \frac{1}{2} b = \tang \frac{1}{2}(a+c)\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C)}{\cos\frac{1}{2}(A-C)}$$

$$\cot \frac{1}{2} C = \tang \frac{1}{2}(B-A)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b+a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-a)}$$

$$\cot \frac{1}{2} C = \tang \frac{1}{2}(B+A)\frac{\cos\frac{1}{2}(b+a)}{\cos\frac{1}{2}(b-a)}$$

$$\cot \frac{1}{2} A = \tang \frac{1}{2}(C-B)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(c+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(c-b)}$$

$$\cot\frac{1}{2}A = \tang\frac{1}{2}(C+B)\frac{\cos\frac{1}{2}(c+b)}{\cos\frac{1}{2}(c-b)}.$$

$$\cot\frac{1}{2}B = \tang\frac{1}{2}(A-C)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+c)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-c)}$$

$$\cot\frac{1}{2}B = \tang\frac{1}{2}(A+C)\frac{\cos\frac{1}{2}(a+c)}{\cos\frac{1}{2}(a-c)} \quad (*)$$

Se si uniscono con queste equazioni l'equazioni (A) le quali serviranno nel caso ove conosceremo due lati ed uno degli angoli opposti a questi lati, ovvero due angoli ed uno de' lati opposti a questi angoli, avremo tutto ciò, che bisogna per risolvere un triangolo sferico: ciò, che precede, può dunque essere risguardato come formante un Trattato completo di Trigonometria sferica. Combinando tra loro le diverse formule ottenute successivamente, potrebbonsi dedurne molte altre d'un uso frequentissimo nei calcoli Astronomici. Siam debitori, in questo genere, al Sig. *Delambre* de' resultati elegantissimi e numerosissimi, e delle applicazioni importanti de' metodi approssimativi, ovver delle *serie* ai casi, che ne son suscettibili.

Recapitolazione delle formule necessarie per risolvere un triangolo sferico qualunque.

61. Omettendo le variazioni, che può presentare un medesimo caso, non si trovano che le sei seguenti:

1.° *Conoscendo i tre lati* (a, b, c) *trovare uno degli angoli* (A):

(*) *Queste formule e le precedenti son conosciute sotto il nome d'* Analogie di Nepero, *perchè desse si deducono dalle regole date da questo Geometra per risolvere i triangoli sferici* (Logarithmorum canonis descriptio).

$$\tang \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b-c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+c-a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b+c)}}$$

2.° *Conoscendo i tre angoli* (A, B, C), *trovare uno de' lati* (a):

$$\tang \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(B+C-A) \cos \frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}} \quad (*).$$

3.° *Conoscendo due lati* (b, c), *e l'angolo compreso* (A), *trovare gli altri angoli* (B, C);

$$\tang \frac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)} \cot \frac{1}{2} A$$

$$\tang \frac{1}{2}(B-C) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b+c)} \cot \frac{1}{2} A.$$

(*) *In luogo di questa formula e della precedente s' impiegano spesso le seguenti*

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b-c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}},$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}},$$

ottenute nella nota *della pag.* 64, *e che sono analoghe a quella, di cui fa uso pel caso simile della Trigonometria rettilinea* (38).

Per trovare in seguito il terzo lato (a), vedete la formula del 6.° caso.

4.° *Conoscendo due angoli* (B, C), *ed il lato compreso* (a), *trovare gli altri lati* (b, c);

$$\tang \frac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} \tang \frac{1}{2} a$$

$$\tang \frac{1}{2}(b-c) = \frac{\sen \frac{1}{2}(B-C)}{\sen \frac{1}{2}(B+C)} \tang \frac{1}{2} a.$$

Per trovare in seguito il 3.° angolo (A), vedete la formula del 5.° caso.

5.° *Conoscendo due lati* (a, c), *ed un angolo opposto* (C), *trovar l'altro angolo opposto* (A);

$$\sen A = \frac{\sen a \sen C}{\sen c}.$$

5.° *Conoscendo due angoli* (A, C), *ed un lato opposto* (c), *trovare l'altro lato opposto* (a);

$$\sen a = \frac{\sen c \sen A}{\sen C}.$$

Affin di trovare in seguito per questi due ultimi casi *l'angolo* (B) *ed il lato* (b), *compresi uno trai lati*, *l'altro tra gli angoli dati o calcolati*, cangeremo nelle formule del 3.° e del 4.° caso b in a, B in A, e reciprocamente; conseguiremo

$$\tang \frac{1}{2}(A+C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-c)}{\cos \frac{1}{2}(a+c)} \cot \frac{1}{2} B,$$

$$\tang \frac{1}{2}(a+c) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-C)}{\cos \frac{1}{2}(A+C)} \tang \frac{1}{2} b,$$

ove tutto è cognito ad eccezione di cot $\frac{1}{2}$B e di tang $\frac{1}{2}b$, le quali saranno in conseguenza determinate.

Col mezzo di questa recapitolazione e di quella che trovasi alla pag. 62, non vi è cosa più facile quanto risolvere un triangolo sferico qualunque, applicando, dietro agli enunciati di sopra, le lettere A, B, C, a, b, c, agli angoli, ed ai lati dati e cercati. Il calcolo aritmetico s'effettua mediante la somma e la sottrazione de' *logaritmi* nella maniera indicata negli esempi riportati al n.° 39; solamente non s'impiega che la *Tavola* de' *logaritmi* delle linee trigonometriche, poichè non si tratta che d'archi di circolo.

Allorchè, nei quattro primi casi, le circostanze del problema lascieran dubitare se gli archi o gli angoli cercati equivalgono a più o men del quadrante, ovvero dell'angolo retto, leverem la difficoltà ricorrendo all'espressioni dei coseni e delle tangenti delle *incognite* (57). Ma ne'due ultimi casi può succedere che il problema proposto sia suscettibile di due soluzioni, e ce ne assicurerem facilmente studiando la maniera di costruire un angolo trièdro allorchè si conoscono due delle sue facce e l'inclinazione d'una di esse sulla terza, oppure allorchè si conoscono le inclinazioni di due facce sulla terza, e l'angolo delle costole, che determinano una delle prime. Io non saprei entrare adesso in queste particolarità (*); ma eccone almeno qui i resultati.

1.° Il triangolo sferico non può esistere che in una sola maniera coi dati a, c e C

allorchè $C = 1^q$
$C < 1^q$, $a < 1^q$, $c > a$
$C < 1^q$, $a > 1^q$, $c > 2^q - a$
$C > 1^q$, $a < 1^q$, $c < 2^q - a$
$C > 1^q$, $a > 1^q$, $c < a$;

ed è suscettibile di due forme

(*) *Fa di mestieri consultare lo* Sviluppo nuovo della Parte elementare delle Matematiche di Bertrand, *Tom II* Trigonometria, *Sezione V.*

allorchè $C < 1^q, \quad a < 1^q, \quad c < a$
$C < 1^q, \quad a > 1^q, \quad c < 2^q - a$
$C > 1^q, \quad a < 1^q, \quad c > 2^q - a$
$C > 1^q, \quad a > 1^q, \quad c > a$
$C <$ ov. $> 1^q, \quad a = 1^q$.

2.° Coi dati A, C e c il detto triangolo non può aver che una forma

allorchè $c = 1^q$
$c > 1^q \quad A > 1^q, \quad C < A$
$c > 1^q, \quad A < 1^q, \quad C < 2^q - A$
$c < 1^q, \quad A > 1^q, \quad C > 2^q - A$
$c < 1^q, \quad A < 1^q, \quad C > A$;

e desso ne ha due quando

$c > 1^q, \quad A > 1^q, \quad C > A$
$c > 1^q, \quad A < 1^q, \quad C > 2^q - A$
$c < 1^q, \quad A > 1^q, \quad C < 2^q - A$
$c < 1^q, \quad A < 1^q, \quad C < A$
$c <$ ov. $> 1^q, \quad A = 1^q$.

61. Per dare un' applicazione della Trigonometria sferica, sceglierò il seguente problema. *Conoscendo un angolo* MSN, *fig.* 23, *misurato in un piano inclinato e gli angoli, che fanno con una verticale* SS′ *i lati* SM *e* SN *del primo, trovar l' angolo* M′S′N′ *formato sul piano* M′S′N′ *orizzontale, ovvero perpendicolare a* SS′, *dalle proiezioni* M′S′, N′S′ *delle linee* MS *e* NS. Fig. 23.

Le tre linee SS′, SM e SN determinano un angolo trièdro, di cui il punto S n'è il vertice, nel qual si conoscono i tre angoli piani MSN, MSS′ e NSS′; e poichè la retta SS′ è perpendicolare sul piano N′S′M′, essa è pure perpendicolare su ciascuna delle linee M′S′, N′S′ situate respettivamente nei piani S′SN, S′SM, e formanti in conseguenza tra loro un angolo eguale a quello, che misura l'inclinazione di questi piani: il problema proposto riducesi dunque a determinar quest' inclinazione. È di questa maniera appunto che trovasi risoluto il detto problema col mezzo di operazioni *grafiche* nel *Saggio di Geometria sui piani e sulle superficie*, ovvero *Complemento degli Elementi di Geometria* n.° 41.

Ma si può ottener l'angolo cercato considerandolo come faciente parte del triangolo sferico BAC, formato dai circoli resultanti dalle sezioni, che i tre piani MSN, S′SM,

S'SN farebbero in una sfera, il cui centro fosse in S, ed il cui raggio fosse eguale a quel delle *Tavole*. S'hanno in questo triangolo i lati AB, AC, BC, i quali sono le respettive misure degli angoli dati NSS', MSS', MSN, e l'angolo richiesto è precisamente l'angolo A; esso si troverà dunque per mezzo della prima regola del num.° precedente.

Com'esempio di calcolo suppongo che siansi osservati

l'angolo MSN di $0^q,7597 = BC$,
l'angolo S'SM di $0^q,5913 = AC$,
l'angolo S'SN di $0^q,6542 = AB$.

Questi angoli rappresentando i lati d'un triangolo sferico, di cui cercasi l'angolo A, io fo

$$a = 0^q,7597, \quad b = 0^q,5913, \quad c = 0^q,6542,$$

ed impiego la formula

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+b-c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen}\,b\ \text{sen}\,c}},$$

(*nota* alla pag. 74).

Gli archi $\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(a+c-b)$ si forman prendendo in primo luogo la semi-somma de' tre lati a, b, c, e togliendone in seguito ciascuno dei lati, i quali contengon l'angolo cercato (38); dipoi si prendono i *logaritmi* dei seni di questi lati, e i *complementi* aritmetici dei *logaritmi* dei seni dei resti, come lo dimostra l'operazione seguente,

	$0^g,7597$		
	$0\;,5913$		
	$0\;,6542$		
Somma.	$2^g,0052$		
Semi-somma	$1^g,0026$		$1^g,0026$
	$0\;,5913$		$0\;,6542$
1.° resto.	$0^g,4113$	2.° resto.	$0^g,3484$

l. sen $0^g,4113$	$= 9,7796340$
l. sen $0^g,3484$	$= 9,7162989$
Compl. arit. del l. sen $0^g,5913$	$= 0,0964168$
Compl. arit. del l. sen $0^g,6542$	$= 0,0674914$
Somma.	$19,6598411$

$$\log \text{sen} \frac{1}{2} A = 9,8299205,$$

il qual nelle *Tavole* corrisponde a $0^g,47254 = \frac{1}{2}A$; e raddoppiando quest' arco, si trova $A = 0^g,94508$, ovvero solamente $A = 0^g,9451$, limitandosi a quattro decimali; tal è l'angolo M'S'N' corrispondente al valore dato per l'angolo MSN.

CAPITOLO III.

Dell' applicazione dell' Algebra alla Geometria.

63. L'applicazione dell' Algebra alla Geometria ha primieramente per fine di far servire le operazioni algebriche a combinare insieme più teoremi di Geometria, onde dedurne delle conseguenze. Egli è così che nei due capitoli precedenti sono arrivato alle principali formule della Trigonometria rettilinea e della Trigonometria sferica. Un teorema, il quale stabilisce una relazione tra più linee d'una grandezza definita, può sempre esprimersi col mezzo d'una equazione; e tutte le trasformazioni, che si operano sopra questa equazione, essendo tradotte in linguaggio ordinario, somministrano degli enunciati, che son delle conseguenze del Teorema, dal quale siamo partiti: ma questo punto di vista non offre che una picciolissima parte di ciò, che dee abbracciare l'applicazione dell' Algebra alla Geometria. Questo ramo delle Matematiche, considerato in generale, non si limita alla ricerca delle proprietà dell' estensione col mezzo dei metodi algebrici: vi si vede ancora come si possa rappresentare mediante le dette propietà tutto ciò, che significa un' espressione algebrica qualunque, riportando sempre le costruzioni delle figure alle operazioni del calcolo, e ritornando da queste ultime alle prime. Questo è ciò, che dimostreranno successivamente i diversi problemi trattati nel presente capitolo.

La scrittura algebrica, sì utile per esprimere le condizioni dei problemi, i quali riguardano i numeri, non è meno comoda per quelli, i quali hanno rapporto alla Geometria. Questi ultimi posson mettersi in equazione come i primi allorquando siamo arrivati a trovare nel loro enunciato la relazione delle incognite, e delle cognite o *date*; ma fa di mestieri perciò chiamare in suo soccorso alcune delle proprietà delle specie di grandezza, che si considera.

64. Per esempio, poichè un triangolo è determinato dalla conoscenza dei suoi tre lati, la sua area debb' esserlo pure con questo mezzo, e ci possiamo proporre il seguente problema.

Conoscendo i tre lati d'un triangolo, trovare l'espressione della sua area.

L'area d'un triangolo essendo eguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza, si fa immediatamente manifesto che il problema riducesi a determinare l'altezza; ed abbassando nel triangolo ABC, *fig.* 14, una perpendicolare sul lato AC, si forman due triangoli rettangoli, i quali somministrano delle relazioni tra i lati AB, BC, la perpendicolare BD, ed i segmenti AD e CD formati da questa perpendicolare. Fig. 14

Infatti, se si denotino per c, c', c'' i lati AB, BC, AC del triangolo, per t il segmento AD, e per u la perpendicolare BD, i triangoli rettangoli ABD, BDC daranno

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2, \quad \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2;$$

osserveremo inoltre che nel primo triangolo della figura

$$DC = AC - AD = c'' - t,$$

e nel secondo

$$DC = AD - AC = t - c''.$$

Ponendo in luogo delle linee le lettere, che le rappresentano, e facendo attenzione che $(c' - t)^2 = (t - c'')^2$, formeremo, per l'uno e l'altro triangolo, l'equazioni

$$c^2 = u^2 + t^2, \quad c'^2 = u^2 + (c'' - t)^2,$$

le quali non contenendo che due incognite t e u, ne determinano i valori.

Se si sviluppa la seconda equazione, e che dessa si tolga dalla prima, i termini u^2 e t^2 spariranno; conseguiremo

$$c^2 - c'^2 = 2c''t - c''^2 \; (*),$$

di dove ricaveremo

$$t = \frac{c^2 - c'^2 + c''^2}{2c''},$$

e l'equazione $c^2 = u^2 + t^2$ somministrando

$$u = \pm\sqrt{c^2 - t^2},$$

(*) *Farò osservare che quest'equazione posta sotto la forma* $c'^2 = c^2 + c''^2 - 2c''t$, *presenta, riguardo al lato* c' *ovvero BC, il teorema del n.° 76 degli* Elementi di Geometria.

ne dedurremo, mediante la sostituzione del valore di t, quello di

$$u=\pm\sqrt{c^2-\frac{(c^2-c'^2+c''^2)^2}{4c''^2}}$$

ovvero

$$u=\frac{\pm\sqrt{4c^2\cdot c''^2-(c^2-c'^2+c''^2)^2}}{2c''}.$$

Si può col mezzo di questa formula trovar l'altezza d'un triangolo quando si conoscono i suoi tre lati; e siccome l'espressione della sua area si misura colla metà del prodotto della sua base moltiplicata per la sua altezza, ne dedurremo da ciò, che precede, l'area d'un triangolo tostochè si conosceranno i tre lati.

La lettera u denotando la prependicolare abbassata sul lato c'' del proposto triangolo, l'area di questo triangolo sarà

$$\frac{1}{2}c''u=\frac{1}{4}\sqrt{4c^2c''^2-(c^2-c'^2+c''^2)},$$

ponendo per u il valore di sopra trovato.

Tal' è l'espressione dell'area d'un triangolo per mezzo de' suoi tre lati. Considerandola con attenzione, è facil vedere ch'essa non è qui presentata sotto la forma la più elegante, e che le si possa dare, poichè dessa non sembra *simmetrica* per rapporto a ciascuno de'lati c, c', c'', il che tuttavia dovrebb'essere, perchè cangiandovi queste lettere le une nell'altre, essa non dee cangiar di valore. Segue evidentemente da ciò che la medesima può esser ridotta a non contenere che delle combinazioni simili delle lettere, ch'essa contiene; e si arriva a questo fine osservando che la quantità $4c^2c''^2-(c^2-c'^2+c''^2)^2$ essendo la differenza di due quadrati, si decompone nei fattori

$$2cc''+c^2+c''^2-c'^2,\quad 2cc''-c^2-c''^2+c'^2,$$

i quali riduconsi a

$$(c+c'')^2-c'^2,\quad -(c-c'')^2+c'^2,$$

i quali pure si decompongono nei quattro seguenti

$$c+c'+c'',\quad c+c''-c',\quad c+c'-c'',\quad c'+c''-c,$$

avrem dunque

$$\frac{1}{4}\sqrt{(c+c'+c'')(c'+c''-c)(c+c''-c')(c+c'-c'')},$$

Adesso, se si fa attenzione che

$$c'+c''-c=(c+c'+c'')-2c$$
$$c+c''-c'=(c+c'+c'')-2c'$$
$$c+c'-c''=(c+c'+c'')-2c'',$$

e si pone $c+c'+c''=2f$, troverem finalmente che l'area del triangolo ABC è espressa da

$$\frac{1}{4}\sqrt{2f.2(f-c).2(f-c').2(f-c''),}$$

e si riduce a

$$\sqrt{f(f-c)(f-c')(f-c'')};$$

formula commendevole tanto per l'utilità, di cui essa può essere per valutar l'area d'una figura piana qualunque, quanto per la sua eleganza: dessa dimostra che *l'area d'un triangolo è espressa dalla radice quadrata del prodotto della semi-somma dei tre lati moltiplicata per le differenze tra questa semi-somma e ciascuno dei lati.*

65. Il metodo indicato negli *Elementi di Geometria*, ai num.[i] 234 e 268, per trovare l'altezza intera d'una piramide, o d'un cono troncato da un piano parallello alla loro base, essendo ridotto in formula, conduce ad una espressione notabile del volume di questi corpi; ed ecco in qual modo.

Se si denotano per a e b i due lati omologhi delle basi d'un tronco di piramide, ovvero i raggi di quelle d'un tronco di cono, per g l'altezza di questo tronco, per h l'altezza della piramide o del cono intero, avremo la proporzione

$$a-b : a :: g : h, \text{ donde } h=\frac{ag}{a-b}.$$

L'altezza della porzione tolta essendo $h-g$, avrà per espressione

$$h-g=\frac{ag}{a-b}-g=\frac{bg}{a-b}.$$

Ciò posto, le basi del tronco essendo simili, staranno tra loro come i quadrati delle loro linee omologhe; di maniera che, chiamando S la base inferiore, e s la base superiore, avremo

$$S : s :: a^2 : b^2, \text{ ovvero } S : a^2 :: s : b^2.$$

Denotando in seguito per m il rapporto delle grandezza S e a^2, conseguiremo

$$S = a^2 m, \quad s = b^2 m;$$

ed i volumi del corpo intero, e del corpo detratto saranno espressi respettivamente da

$$\frac{1}{3} hS = \frac{1}{3} \frac{mga^3}{a-b}, \ \frac{1}{3} (h-g) s = \frac{1}{3} \frac{mgb^3}{a-b},$$

ponendo in luogo di S; s, h, e $h-g$ i valori trovati qui sopra. Togliendo finalmente la seconda espression dalla prima, avremo pel volume del tronco

$$\frac{1}{3} \frac{mg(a^3-b^3)}{a-b} = \frac{1}{3} mg(a^2+ab+b^2) = \frac{1}{3} g(ma^2+mab+mb^2).$$

Ora ma^2 e mb^2 son già le basi inferiore e superiore del tronco; e se si faccia $ab = c^2$, $c = \sqrt{ab}$, questa espressione denoterà una media proporzionale tra le linee a e b, ed in conseguenza $mab = mc^2$ esprimerà l'area d'un poligono simile alle basi dell tronco e costrutto sul lato c, ovvero d'un circolo del raggio c.

Segue dunque dal resultato precedente che *il volume d' un tronco di piramide, o di cono è eguale al terzo della sua altezza moltiplicato per la somma dell' aree delle sue due basi, e d' una figura simile costrutta sopra un lato, o sopra un raggio medio proporzionale tra quelle di queste due basi*; e siccome $mab = \sqrt{ma^2 \cdot mb^2}$, si fa manifesto che l'area di questa figura è media proporzionale tra quelle delle basi. Se si alzano sopra queste tre figure delle piramidi o dei coni della medesima altezza del tronco proposto, la somma dei loro volumi sarà equivalente a quella del tronco suddetto.

66. Nei problemi precedenti avevasi in vista un resultato numerico: qualche volta si cercano delle linee.

Che sia proposto, per esempio, d' inscrivere un quadrato DEGF in un triangolo ABC, *fig.* 24; bisognerà supporre il problema risoluto, e cercare in seguito tra le linee date immediatamente dal triangolo e dal lato del quadrato una relazione, la quale possa esprimersi algebricamente.

Per questo abbasseremo la perpendicolare BH, la quale riguarderem come cognita, poichè sappiamo condurla; e paragonando i triangoli simili BAC e BDE, BAH e BDI, formeremo le proporzioni

$$AB : BD :: AC : DE,$$

$$AB : BD :: BH : BI,$$

le quali conducono a

$$AC : DE :: BH : BI.$$

Quest'ultima dà una relazione tra le linee cognite AC, BH e le linee incognite BI, DE; ma BI dipende da DE, poichè BI=BH—IH, e per la definizion del quadrato IH=DE, denotando per a e b, i dati AC e BH, e per x l'incognita IH o DE, avremo

$$a : x :: b : b - x,$$

di dove

$$bx = ab - ax.$$

Da questa equazione di primo grado concludesi

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$

Allorchè le rette a e b son riportate ad una misura comune, ovvero espresse in numeri, la formula suddivisata somministra, mediante delle operazioni aritmetiche, il numero, che esprime la lunghezza della retta IH; prendendo questo numero sulla retta BH, avremo il punto I, dal quale bisognerà condurre la retta DE.

Non è necessario, per determinare il punto I, di ricorrere ai numeri, perchè le operazioni indicate nell'espressione di x possono effettuarsi sulle linee. Si vede infatti che quest'incognita è il quarto termine della proporzione seguente

$$a + b : a :: b : x,$$

e che in conseguenza tutto si riduce a trovare una quarta proporzionale alle tre linee

$$a + b, a \text{ e } b.$$

Riguardasi in generale come elegante il collegare con la figura, che contiene i dati del problema, le operazioni, che bisogna eseguire per ottenere la soluzione; si può in conseguenza, nel problema presente, impiegar l'angolo retto CHB alla determinazione della quarta proporzionale da ritrovarsi. Porteremo dunque sopra HC prolungata

1.° HL $= a =$ AC, 2.° LK $= b =$ BH;

tirando BK, e poi conducendo IL parallelamente a BK, il punto I, mediante il quale avremo

HK : HL :: BH : IH,

apparterrà al lato DE del quadrato DEGF.

67. Possiamo arrivare nella stessa maniera a problemi d' un grado superiore al primo.

Sappiamo che dividere una linea *in media ed estrema ragione* vuol dire dividerla in modo che uno de' segmenti sia medio proporzionale tra la linea intera e l' altro segmento. Per risolvere algebricamente questo problema, denoteremo la linea intera per a, il segmento incognito per x: l' altro segmento sarà $a-x$, ed avremo

$$a : x :: x : a-x,$$

donde concluderemo

$$a^2 - ax = x^2;$$

risolvendo quest' equazione, ricaveremo

$$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}.$$

Le operazioni indicate in questa soluzione possono effettuarsi sulle linee col mezzo del triangolo rettangolo; poichè $a^2 + \frac{1}{4}a^2$ essendo la somma dei quadrati delle linee a

Fig. 25. e $\frac{1}{2}a$, il radicale $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2}$ è l' ipotenusa AC, *fig.* 25, del triangolo rettangolo costrutto sopra i lati AB $= a$, BC $= \frac{1}{2}a$. Non si tratta, per ottenere i due valori di x, che di combinare, per sottrazione e per addizione, la linea AC con la linea BC $= \frac{1}{2}a$, il che s' effettuerà portando BC da C in D sopra AC, e da C in D′ sopra il suo prolungamento; poichè avremo

$$AD = AC - DC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a, \text{ di dove } x = AD$$

$$AD' = AC + DC = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a, \text{ di dove } x = -AD'.$$

La retta AD riportata in E sopra AB mediante un

arco di circolo è la soluzione data nel n.° 132 degli *Elementi di Geometria*; e ponendo sotto la forma

$$a^2 = ax + x^2$$

l'equazion del problema, se ne ricava la proporzione

$$x + a : a :: a : x,$$

la quale riducesi a

$$AD' : AB :: AB : AD,$$

poichè

$$AD' = AD + 2BC = AD + AB.$$

Segue da ciò che la linea AD' è pure divisa *in media ed estrema ragione* nel punto D, e che il maggior segmento DD' è eguale alla linea data AB. Vedremo più sotto (77) l'enunciato, al qual corrispondono nel medesimo tempo i due valori di x, e ciò che significhi il segno —, da cui è affetto il secondo.

Gli esempî precedenti bastano per dimostrare che la risoluzione algebrica dei problemi *determinati* di Geometria presenta delle circostanze analoghe a quella dei problemi relativi ai numeri. Bisogna in primo luogo porre il problema in equazione, e ricavare l'espression dell'incognita; ma in vece d'impegnar il calcolo aritmetico per valutare quest'espressione, fa di mestieri effettuar sulle linee cognite delle operazioni *grafiche* corrispondenti a quelle, le quali sono indicate dai segni algebrici. Nel problema del n.° 66, l'equazione del quale non era che di primo grado, s'è determinata l'incognita col mezzo di linee proporzionali; e pel problema qui sopra, l'equazione del quale saliva al secondo grado, siamo ricorsi alla proprietà del triangolo rettangolo. Queste determinazioni son ciò, che dicesi la *costruzione* dei valori dell'incognita; ed io vado ad esporne i principî, i quali sono comuni a tutti i problemi di questi due gradi.

68. Un'osservazion generale, e che avremo spesso bisogno di verificare, si è quella che quando nell'enunciato d'un problema non entrano che nelle linee, e la quantità cercata è dessa pure una linea, la sua espressione conterrà sempre un fattore di più nel numeratore che nel denominatore; e ciascuna di queste quantità è composta di termini omogenei tra loro. L'espressione di t, trovata nel n.° 64, soddisfà a questa condizione: i termini del suo numeratore hanno due fattori, ed il suo denominatore uno solo.

Segue da ciò che quando l'espressione d'una linea qualunque non contiene de' radicali, si può, rappresentando tutte le quantità, che dessa contiene, per linee, ottener la lunghezza della prima senza ricorrere ai numeri, e solamente cercando col *compasso* delle quarte proporzionali a linee date. Per dimostrarlo, sarà bastante l'esempio seguente.

Sia $$t=\frac{abc+d^3-e^2f}{gh+i^2}:$$

questa espressione, il numerator della quale è composto di termini contenenti ciascuno tre fattori, mentre che i termini del denominatore non ne hanno che due, appartiene, dietro l'osservazione suddivisata, a una linea. Se si faccia

$$abc=kd^2,\qquad e^2f=k'd^2,$$
$$gh=k''d,\qquad i^2=k'''d,$$

avremo

$$t=\frac{d^2(k+d-k')}{d(k''+k''')}=\frac{d(k+d-k')}{k''+k'''};$$

otterrem dunque t cercando una quarta proporzionale alle tre linee $k''+k'''$, $k+d-k'$ e d allorchè le linee incognite rappresentate da k, k', k'', k''' saranno determinate. L'equazioni poste qui sopra conducono a

$$k=\frac{abc}{d^2}=\frac{ab}{d}\times\frac{c}{d},\ k'=\frac{e^2f}{d^2}=\frac{ef}{d}\times\frac{e}{d},$$

$$k''=\frac{gh}{d},\qquad k'''=\frac{i^2}{d};$$

valori, i quali si formano mediante le proporzioni seguenti

$$d:a::b:\frac{ab}{d}\qquad d:c::\frac{ab}{d}:\frac{abc}{d^2}=k,$$

$$d:e::f:\frac{ef}{d},\qquad d:e::\frac{ef}{d}:\frac{e^2f}{d^2}=k',$$

$$d:g::h:\frac{gh}{d}=k'',\ d:i::i:\frac{i^2}{d}=k''';$$

cercando dunque i quarti termini di ciascuna col mezzo delle linee proporzionali, avrem successivamente le lunghezze delle linee rappresentate da

$$\frac{ab}{d}, \frac{abc}{d^2}, \frac{ef}{d}, \frac{e^2f}{d^2}, \frac{gh}{d}, \frac{i^2}{d},$$

le quali daranno

$$k, k', k'' \text{ e } k''';$$

e mediante quest' ultime troveremo t.

Riconoscesi facilmente che lo spirito del metodo, di cui ho fatt' uso per costruire un' espressione algebrica, consiste nel trasformare il numeratore e il denominatore dell' espressione proposta in prodotti d'un certo numero di fattori semplici o di primo grado; il che è sempre possibile coi mezzi, che io ho impiegati.

Vi sono dei casi ove questa trasformazione può effettuarsi immediatamente senza che siavi bisogno d'introdurvi dell' *indeterminate*: tal è quello dell' espressione

$$t = \frac{c(a^2-b^2)}{a^2+b^2},$$

il numerator della quale equivale a

$$c(a+b)(a-b),$$

e di cui il denominatore può essere scritto così

$$\sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2+b^2};$$

si conseguisce allora

$$t = \frac{(a-b)(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{a^2+b^2}},$$

ciò, che si ottiene mediante le proporzioni

$$\sqrt{a^2+b^2} : a+b :: c : \frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sqrt{a^2+b^2} : a-b :: \frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}} : \frac{(a-b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \frac{(a+b)c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Il radicale impiegato in questo calcolo si costruisce facilmente, poichè desso esprime l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, di cui i lati sono a e b.

69. Il Triangolo rettangolo e il circolo somministrano i mezzi di costruire la radice quadra d'una quantità qualunque espressa in linee. L'uso del primo è evidente allorchè

la quantità compresa sotto il radicale è la somma o la differenza di due quadrati. Difatti, si hanno in questo caso $\sqrt{a^2+b^2}$, e $\sqrt{a^2-b^2}$; una di queste espressioni può essere riguardata come l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, di cui i lati sono a e b, e l'altra come un dei lati adiacenti all' angolo retto in un triangolo della stessa natura, di cui l'ipotenusa fosse a, ed il terzo lato b.

Costruiremo, mediante una serie di questi triangoli, l'espressione $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$; avendo ottenuto primieramente $\sqrt{a^2+b^2}$, rappresenterem questa linea per α, il che darà

$$a^2+b^2=\alpha^2,$$

e la quantità proposta diverrà

$$\sqrt{\alpha^2+c^2+d^2}$$

costruiremo il radicale $\sqrt{\alpha^2+c^2}$ come il precedente, e chiamando ε il resultato di questa operazione, avremo

$$\alpha^2+c^2=\varepsilon^2;$$

altro non resterà da trovare che $\sqrt{\varepsilon^2+d^2}$, il che si farà prendendo l' ipotenusa del triangolo rettangolo, i cui lati sono ε e d. È facile d'estendere questo metodo al caso dove il radicale da costruirsi contenesse un qualunque numero di quadrati.

70. Passo adesso all' impiego del circolo nell' estrazione delle radici quadrate. Sappiamo che la perpendicolare alzata sopra un diametro è *media* proporzionale tra i due segmenti di questo diametro (*Geom.* 130); otterrem dunque
Fig. 26. $\sqrt{ab}$ prendendo, *fig.* 26, $AP=a$, $BP=b$, e descrivendo un circolo sulla somma AB di queste due linee presa per diametro: la perpendicolare PM, alzata dal punto P, essendo *media* proporzionale tra AP e BP, sarà $\sqrt{ab}$.

Possiamo trovare ancora una *media* proporzionale tra due linee qualunque a e b prendendo la maggior delle due pel diametro AB del circolo, e portando l'altra da A in P; alzando in seguito l'ordinata PM, e tirando la corda AM, avremo la *media* proporzional dimandata (*Geom.* 131).

Col soccorso di questi metodi costruiremo tutti i radi-

cali di secondo grado, qualunque siasi la quantità, ch'essi contengono. Sia, per esempio,

$$\sqrt{a^2+bc-\frac{def}{g}};$$

faremo $bc=ak$, $\frac{def}{g}=ak'$; l'espressione proposta diverrà

$$\sqrt{a^2+ak-ak'}=\sqrt{(a+k-k')a};$$

e per ottenerla, servirà prendere una *media* proporzionale tra due linee respettivamente eguali ad $a+k-k'$ ed a. È d'altronde manifesto che le quantità k e k' si determineranno per mezzo delle linee proporzionali dietro a ciò, ch'è stato detto, nel n.° 68; poichè l'equazioni, dalle quali esse dipendono, danno

$$k=\frac{bc}{a},\quad k'=\frac{def}{ag},$$

e conducono in conseguenza alle seguenti proporzioni

$$a : b :: c : k,$$

$$a : d :: e : \frac{de}{a},\quad g : f :: \frac{de}{a} : \frac{def}{ag}=k'.$$

71. La quantità, che ci proponghiamo di costruire, potrebbe non essere *omogenea*; ma ciò non succederà che allorquando avremo fatto alcune linee eguali all'unità, ovver quand'avremo rappresentato un numero con una lettera, ovvero una linea con un numero; ed i metodi indicati di sopra non saranno impediti da questa circostanza purchè si faccia ricomparire in tutti i termini, ov'essa dovrebbe trovarsi, e con degli esponenti convenevoli, la linea presa per unità.

Se si avesse $\sqrt{a+\frac{bc}{d^3}}$, e si fosse saputo, mediante l'enunciato del problema, il quale ci avrebbe condotto a quest'espressione, ch'essa dee appartenere a una linea, vedrebbesi che ciascuno dei termini compresi sotto il radicale dovrebb'essere di secondo grado, e che in conseguenza, denotando l'unità per n, bisognerebbe scrivere an in luogo di a, e $\frac{bcn^5}{d^3}$ in luogo di $\frac{bc}{d^3}$ il che nulla cangia nella grandezza as-

soluta di queste quantità, poichè $n = 1 = n^3$, ed in generale $n^m = 1$, qualunque sia m. Avrebbesi in tal maniera

$$\sqrt{an + \frac{bcn^3}{d^3}} = \sqrt{n\left(a + \frac{bcn^2}{d^3}\right)};$$

espressione, la quale costruirebbesi facilmente.

Osserverò che, dietro quel che precede, potrebbesi estrarre, mediante un'operazione *grafica*, la radice quadrata d' un numero qualunque prendendo una *media* proporzionale tra due linee, una delle quali rappresenterebbe l' unità, e l' altra avrebbe con quest' ultima il rapporto espresso dal numero proposto. $\sqrt{\frac{7}{5}}$, per esempio, si otterrebbe prendendo una media proporzionale tra due linee, una delle quali fosse i $\frac{7}{5}$ dell' altra; poichè $\sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{1 \times \frac{7}{5}}$.

72. Non v'è cosa più facile adesso che costruir l' espressione delle radici dell' equazione di secondo grado $x^2 - ax = b^2$, la quale può rappresentar tutte quelle di questo grado. Infatti, ricavando il valor di x, si ha

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2};$$

non si tratta che di costruire il radicale $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ (69), e di prender in seguito la somma e la differenza del resultato e della linea $\frac{1}{2}a$, per ottener la grandezza di ciascuna delle radici della proposta.

Se quest' equazione fosse della forma $x^2 - ax = -b^2$, si avrebbe

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2};$$

la sua costruzione, in questo caso, non differirebbe da quella del precedente che in ciò che il radicale sarebbe espresso da uno dei lati dell' angolo retto d' un triangolo rettangolo in luogo d' esserlo dall' ipotenusa, e che questo trian-

golo cesserebbe d'esistere se si avesse $\frac{1}{2}a < b$, perchè allora avendo preso sopra un dei lati d'un angolo retto ABC, *fig.* 27, una grandezza $AB = b$, il circolo DE, descritto Fig. 27. dal punto A come centro, con un raggio, il quale fosse minore di AB, non arriverebbe all'altro lato BC. Questa circostanza si accorda con la Teorica dell'equazioni di secondo grado, la quale dà delle radici *immaginarie* pel caso di cui si tratta.

Potremo applicare ciò, che precede, al problema seguente. *Essendo data la somma o sivvero la differenza dei due lati contigui d'un rettangolo e la sua area, costruire questo rettangolo.*

Infatti, sieno b^2 la superficie del rettangolo dimandato, a la somma, oppure la differenza dei suoi lati contigui, e x uno di essi; l'altro sarà espresso da $a-x$ nel primo caso, e da $a+x$ nel secondo; la superficie sarà $(a-x)\,x$ pel primo caso, e $(a+x)\,x$ pel secondo; di maniera che avremo queste due equazioni

$$ax - x^2 = b^2, \qquad ax + x^2 = b^2,$$

le quali essendo risolute, daranno dei valori di x costruibili col metodo antecedente.

73. Non è necessario risolvere l'equazioni di secondo grado per trovarne *graficamente* le radici; desse si ottengono immediatamente mercè delle proprietà delle linee rette, le quali si tagliano in un circolo.

L'equazione $x^2 + ax = b^2$ essendo posta sotta la forma

$$x\,(x+a) = b^2,$$

si rapporta alla proprietà delle *secanti* e delle *tangenti*, che partono da un medesimo punto (*Geom.* 128); poichè, se si descriva, *fig.* 28, con un raggio $BC = \frac{1}{2}a$ un circo- Fig. 28. lo, e gli si conduca una *tangente* AB, di cui la lunghezza sia b, e pei punti A e C si tiri una *secante* AC, chiamando x la linea AD, avremo evidentemente

$$AD' = AD + DD' = AD + 2BC = x + a;$$

e la proprietà citata di sopra somministrando $AD \times AD' = \overline{AB}^2$, ne risulterà

$$x(x+a)=b^2,$$

ch' è l' equazione proposta.

Se si avesse $x^2-ax=b^2$, bisognerebbe fare $x=AD'$; avrebbesi allora

$$AD=x-a \text{ e } x(x-a)=b^2.$$

La costruzione presente non essendo soggetta ad alcuna eccezione, dimostra che fintantochè b^2 sarà *positivo* nel secondo membro al tempo stesso che x^2 lo è nel primo, le radici dell' equazion proposta saranno sempre *reali*.

L' equazione $x^2-ax=-b^2$ si cangia in $ax-x^2=b^2$, e può scriversi allora nel modo seguente

$$x(a-x)=b^2.$$

Sotto questa forma essa rapportasi alla proprietà delle corde, le quali si taglian nel circolo; poichè, se descrivasi
Fig. 29. sopra un diametro $AB=a$, *fig.* 29, un circolo, si alzi dal punto A una perpendicolare $AC=b$, si tiri in seguito CM paralella ad AB, e dai punti M e M', ove CM incontra il circolo, si abbassino sopra AB le perpendicolari PM e P'M', avremo

$$AP \times BP = AP(AB-AP)=\overline{PM}^2,$$

ovvero

$$AP(a-AP)=b^2;$$

dipoi

$$AP' \times BP' = AP'(AB-AP')=\overline{P'M'}^2,$$

ovvero

$$AP'(a-AP')=b^2;$$

dal che si fa chiaro che prendendo successivamente per x le rette AP ed AP', ricaderemo sull' equazion proposta

$$ax-x^2=b^2,$$

e che in conseguenza le rette AP e AP', ottenute coi metodi sopra indicati, sono i valori dell' incognita x.

È manifesto che quando AC sorpasserà il raggio del circolo, ovvero $\frac{1}{2}a$, la retta CM non incontrerà più il circolo, e non somministrerà in conseguenza alcuna determinazione; ma allora le radici dell' equazion proposta saranno *immaginarie*.

Le radici dell' equazione $x^2+ax=-b^2$ non differi-

ranno da quelle dell' equazione $x^2 - ax = - b^2$, se non perchè desse sono affette dal segno —; ma la loro grandezza s' otterrà sempre mediante la costruzione, che ho già indicata.

74. Nell' applicazione dell' Algebra alla Geometria il segno — s' interpreta in generale come a riguardo dei numeri, rovesciando in una certa maniera l' enunciato del problema, ovvero prendendo le linee, che ne son affette, in un senso contrario a quello, nel quale esse s' eran supposte in principio.

Prima d' andar più avanti debbo rammemorare che le quantità *negative* deggiono la lor origine dalle sottrazioni, le quali non possono effettuarsi nell' ordine, in cui esse sono indicate, perchè la quantità da togliersi si trova maggiore di quella, dalla quale dessa dovrebbesi togliere. Riconoscesi da tal circostanza che v' è errore nell' enunciato del problema, o almeno nella sua applicazione al caso particolare, che si è avuto in veduta; e rettificando quest' errore, vale a dire modificando l' enunciato in modo da render possibile la sottrazione, la quale non s' è potuta eseguire, arrivasi ad un resultato *positivo;* ma rispetto a certi problemi, a tutti quelli, i quali conducono a dell' equazioni di primo grado per esempio, non si ha bisogno di prendersi questa pena. Il segno del resultato indica egli stesso il rovesciamento, di cui l' enunciato è suscettibile, ed i valori *negativi*, impiegati conformemente alle regole stabilite per effettuare le operazioni sulle quantità affette dal segno —, soddisfano nello stesso modo ai problemi come quelli, che son *positivi.* Ecco per qual motivo si è cangiata la denominazione di *radici false*, che gli Analisti davano per l' addietro alle radici *negative* dell' equazioni.

È dunque parimente per mezzo della sottrazione che si debbono spiegare sulle figure geometriche i valori *negativi*, che l' Algebra dà a certe linee; e per sottrarre una linea da un' altra serve portar la prima sulla seconda a partirsi da una dell' estremità di quest' ultima: ma vi sono su quest' operazione *grafica* alcune osservazioni dà fare, le quali dipendono dalla maniera, mediante la quale si descrivon le linee.

Sia primieramente CD, *fig.* 30, la linea da sottrarsi da AB; siccome la prima è minore della seconda, portando questa prima da B in c, la loro differenza Ac sarà posta alla destra del punto A: ma se s'avesse da toglier C'D' maggiore di AB, e si portasse sempre sopra AB, a partirsi Fig. 30.

dalla medesima estremità B, la linea da togliersi, la differenza delle due rette proposte sarebbe espressa da Ac′ sul prolungamento di AB; e sarebbe posta a sinistra del punto A, vale a dire, da un lato opposto al resultato Ac della prima operazione: egli è a questo cangiamento di situazione che corrisponde il segno —.

Sembrerebbe a prima vista che si dovesse effettuare la sottrazione indicata sulle linee C′ D′ ed AB, portando la minore sulla maggiore; perchè questo è ciò, che si fa sui numeri allorchè si toglie il minor dal maggiore: ma bisogna osservare, a riguardo delle linee, che desse sono in generale impiegate ad indicare delle distanze da un certo punto, al quale se ne riportan dell'altre, e che riguardasi come fisso: esse prendono dunque il loro accrescimento dall'estremità opposta a questo punto; ed allora la sottrazione, la quale, di sua natura, è inversa della somma, dalla quale resultano in generale gli accrescimenti, debbe operarsi pure in senso inverso da quella della somma, ed in conseguenza andando verso il lato ove le linee diminuiscono. Da ciò proviene che, se il punto A sulla retta AB è il punto fisso, di cui io parlo, la sottrazione di CD, ovvero di C′D′ debbe operarsi a partire dal punto B. La *continuità* delle linee, e la possibiltà di prolungarle indefinitamente nei due sensi danno a loro riguardo il mezzo d'eseguire, come lo abbiamo veduto, la sottrazione nella maniera medesima, benchè la quantità da sottrarsi sia divenuta la più grande delle due. Ecco un problema semplicissimo, il quale confermerà ciò che abbiam letto adesso.

Fig. 31. 75. *Condurre in un triangolo dato* ABC, fig. 31, *parallelamente al lato* AC *una linea* DE, *che sia eguale a una linea data* MN.

Essendo dati i lati del triangolo, farò

$$AB = a, \qquad AC = b, \qquad MN = c,$$

e prenderò per incognita la distanza AD, perchè la posizione d'una linea paralella ad una linea data è determinata da un solo de' suoi punti. Facendo $AD = x$, avrò $BD = a - x$, ed i triangoli simili BAC e BDE daranno

$$AB : AC :: BD : DE,$$

ovvero

$$a : b :: a - x : c;$$

dunque

$$ab - bx = ac,$$

$$x = \frac{ab - ac}{b} = \frac{a(b-c)}{b}.$$

Il valore di x si costruisce (68) togliendo da $AC = b$ la retta $CF = c$, poi tirando FD parallela a CB; poichè la similitudine dei triangoli ABC, AFD somministra la seguente proporzione

$$AC : AB :: AF : AD$$

$$b : a :: b - c : x = \frac{a(b-c)}{b}.$$

Se la linea MN divenisse maggiore di AC, essa non potrebbe più trovarsi posta nell'interno del triangolo ABC; bisognerebbe prolungare i lati AB e BC; ma allora il punto D passerebbe in D' dall'altro lato del punto A; e questo è precisamente ciò, che indicano il calcolo e la costruzione.

Infatti, se si ha $M'N' > AC$, ne risulterà $c > b$; la quantità $b - c$ sarà in conseguenza *negativa*; ma facendo la sottrazione delle linee nel modo, ch'è stato indicato nel num.° precedente, il punto F passerà in F', e la linea F'D' condotta pel punto F' parallelamente a BC non potrà incontrare che il prolungamento del lato AB in D'.

76. In generale, ogni qual volta che si tratta di distanze riportate ad un punto fisso, e contate sopra d'una medesima linea, o sopra linee paralelle, quelle, le quali sono affette dal segno —, debbono prendersi in un senso opposto a quelle, le quali sono affette dal segno +.

Infatti, se si considera la situazione respettiva di due punti, le distanze dei quali da una retta qualunque sieno espresse da $a + b$ e $a - c$, è manifesto che la distanza scambievole di questi punti è $b + c$, poichè $a + b - (a - c) = b + c$; e per situarli in questa maniera per rapporto ad una retta qualunque A'B', *fig.* 32, fa di mestieri tirare in primo luogo, tanto da un lato che dall'altro di questa linea, ad una distanza $AA' = a$ una paralella AB; dipoi condurre in seguito due altre linee paralelle a quest'ultima, l'una QM al difuori delle prime, e ad una distanza $AQ = b$, l'altra Q'M' al didentro, e ad una distanza $AQ' = c$. Con questo mezzo tutti i punti tali come M e M', posti ai rincontri dell'ultime paralelle, e d'una perpendicolare alla Fig. 32.

linea A′B′, avranno tra loro la distanza richiesta, e si troveranno in una situazione opposta per rapporto alla paralella intermedia AB, dalla quale i loro allontanamenti respettivi sono espressi da $+b$, e $-c$. È facil vedere che dessi sarebbero ambedue dal medesimo lato di AB se le loro distanze dalla linea A′B′ fossero espresse da $a+b$, e $a+c$, perchè allora la loro distanza scambievole sarebbe $b-c$.

Fig. 10. Per questa ragione i *seni*, i quali son le distanze dall' estremità degli archi al diametro AA′ *fig.* 10, ed i *coseni*, i quali son le distanze dal diametro BB′, cangian di segno passando da un lato all'altro di questi diametri (23). La *tangente* segue la stessa legge a riguardo del diametro AA′, e per la ragione medesima.

77. Queste considerazioni non s'applicano così immediatamente alla *secante*, perchè la sua direzione cangia a ciascun istante: frattanto dessa ha nulladimeno un segno proprio alle sue diverse situazioni, ed il quale ricavasi dalla sua espressione analitica $\sec a = \frac{R^2}{\cos a}$; ma non è, in generale, che per rapporto a quelle linee, le quali conservano la medesima direzione, che il cangiamento di segno corrisponde sempre immediatamente al cangiamento di lato (*).

Fig. 25. Le rette AD e AD′, *fig.* 25, le quali rappresentano le *radici* dell'equazione di secondo grado $a^2 - ax = x^2$(67), benchè appartenenti a valori di segni differenti, non son opposte; ma se si trattasse d'applicarle alla soluzion d'un problema ov'esse fossero considerate come distanze da un punto fisso, misurate sopra una linea di direzione costante, bisognerebbe portarle da differenti lati rispetto a questo punto dietro la regola del n.° 76.

Infatti, il problema del n.° 67, per esempio, può essere enunciato nel modo seguente:

(*) *Si può, secondo quel, che mi sembra, dare una spiegazione molto naturale dei cangiamenti di segno della secante osservando che questa linea prende realmente una situazione opposta allorchè dessa incontra la tangente coll' estremità opposta a quella, colla quale essa la incontrava in principio. Infatti, negli archi BA′ e A′B′, pei quali l'espressione analitica della* secante *è negativa, non è più il raggio CM, che incontra la tangente NN′ ma il raggio opposto.*

Trovare sulla retta $AB = a$ *un punto* E *tale che la sua distanza* AE *dal punto* A *sia media proporzionale tra la sua distanza dall'altra estremità* B *e la linea intera* AB. I due valori dell'incognita essendo allora AD e AD', l'ultimo, il quale trovasi affetto dal segno —, debb'esser portato in AE' al di là del punto A per rapporto al punto B. Questa conclusione è facile a verificarsi; poichè il valore di AD', corrispondente $a - x$ nell'equazione $a^2 - ax = x^2$, verifica l'equazione $a^2 + ax = x^2$, la quale resulta dal cangiamento di $+x$ in $-x$; e quest'ultima equazione somministra la proporzione

$$a + x : x :: x : a,$$

la quale riducesi a

$$AB + AE', \text{ ovvero } BE' : AE' :: AE' : AB.$$

Il problema seguente è adattatissimo per far conoscere come bisogni interpretare le diverse soluzioni, che offre una medesima equazione.

78. *Per un punto* E, fig. 33, *posto come si voglia a riguardo di due rette* AB *ed* AC *perpendicolari tra loro, condurre una retta in modo che la parte* D'F' *di questa retta intercetta tra le due linee proposte sia d'una grandezza data* m. Fig. 33.

Per conoscere la posizione della linea D'F', già obbligata a passare nel punto dato E, non è necessario che determinarne un altro punto, il quale può scegliersi come vorremo: prenderò per ciò AD'; e poichè il punto E è dato, supporrò come cognite le linee GE e HE condotte da questo punto parallelamente alle linee AB ed AC; farò in conseguenza.

$$GE = a, \quad HE = b, \quad AD = y.$$

Ciò posto, i triangoli simili EGD' e F'AD' danno

$$GD' : GE :: AD' : AF';$$

ma

$$GD' = AD' - AG = AD' - HE = y - b;$$

dunque

$$y - b : a :: y : AF' = \frac{ay}{y - b}.$$

Il triangolo F'AD' essendo rettangolo in A, somministra l'equazione

$$\overline{AD'}^2 + \overline{AF'}^2 = \overline{D'F'}^2 ,$$

la quale, per la sostituzione dei valori di AD', AF', D'F', diviene

$$y^2 + \frac{a^2 y^2}{(y-b)^2} = m^2 ,$$

e

$$y^4 - 2by^3 + (b^2 + a^2 - m^2)\, y^2 + 2bm^2 y - b^2 m^2 = 0 \quad (1)$$

allorchè dessa sia sviluppata e ordinata.

Questa equazione sale al quarto grado, perchè il problema proposto ha in generale quattro soluzioni. Si vede infatti, mediante l'ispezione della figura, che si può soddisfare in quattro maniere differenti alle condizioni del problema proposto, cioè,

Con le due linee D'F' e D''F'' condotte nell'angolo retto BAC, ove si trova posto il punto E:

Poi colle due linee D'''F''' e D''''F'''' condotte negli angoli CAB' e BAC', adiacenti all'angolo BAC.

Non è difficil vedere che le soluzioni relative all'angolo BAC possono divenire *impossibili* allorchè la grandezza m è al disotto d'un certo limite, il quale dipende dalla posizione del punto E a riguardo delle rette AB ed AC; ma le altre due soluzioni saranno sempre *reali*; poichè le linee F'''D''' e F''''D'''' posson passare pel punto A, il che le renderebbe nulle, ovvero divenir paralelle, una ad AB, l'altra ad AC, ed in conseguenza infinite.

Non è meno evidente che il problema si semplicizzerebbe senza perdere alcune delle sue soluzioni se si prendesse il punto E ad egual distanza dalle rette AC e AB; perocchè bisognerebbe allora conoscere una di quelle dell'angolo BAC, ed una delle altre due, per ottenerle tutte quattro.

Se si sapesse condurre D'F', per esempio, si concluderebbe D''F'' prendendo AF'' = AD', a motivo che il punto E sarebbe similmente posto a riguardo delle due rette AC ed AB; e se ne dedurrebbe, per la ragione medesima, D''''F'''' da D'''F''' prendendo AF'''' = AD'''.

Dopo quest' osservazione farò GE = HE, ovvero $a = b$; e l'equazione proposta diverrà

$$y^4 - 2ay^3 + 2a^2y^2 - m^2(y^2 - 2ay + a^2) = 0 \ldots (2).$$

Non si vede ancora come questa equazione possa essere risoluta più facilmente della precedente; ma la rela-

zione osservata qui sopra tra le diverse soluzioni mette la cosa in tutta evidenza.

I triangoli D'AF' e D''AF'', D'''AF''' e D''''AF'''' essendo eguali, ne segue che gli angoli D'F'A e D''F''A, D'''F'''A e D''''F''''A, sono *complementi* l'uno dell'altro e che in conseguenza, allorchè conosceremo gli angoli D'F'A, D'''F'''A, avremo gli altri due, e tutte le soluzioni del problema saranno cognite. Ma poichè non si hanno in questa maniera che due soluzioni da trovarsi immediatamente, egli è vantaggioso di determinar l'angolo, che la retta, compresa tra le linee AB e AC, dee fare con una di queste linee, per esempio, con AB.

Prendendo per incognita la tangente di quest'angolo, il triangolo D'EG dimostra che

$$\text{tang D'F'A} = \text{tang D'EG} = \frac{\text{D'G}}{\text{GE}} = \frac{y-b}{a} = \frac{y-a}{a}.$$

Se si faccia $\frac{y-a}{a} = z$, avremo

$$y = az + a;$$

e sostituendo questo valore nell'equazione (2), conseguiremo, dopo fatte le riduzioni,

$$a^4 z^4 + 2a^4 z^3 + (2a^4 - a^2 m^2) z^2 + 2a^4 z + a^4 = 0,$$

ovvero $z^4 + 2z^3 + \frac{(2a^2 - m^2)}{a^2} z^2 + 2z + 1 = 0$ (3).

È manifesto adesso che, se la quantità z' soddisfà a questa equazione, la quantità $\frac{1}{z'}$ vi soddisferà egualmente (*); e scrivendola nel modo seguente

$$z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = \frac{m^2}{a^2} z^2,$$

(*) *Questa equazione è di quelle, che si chiaman* reciproche. *Si trova nel* Complemento degli Elementi d'Algebra *la maniera d'abbassarle tanto quanto è possibile; e, per la trasformazione indicata a quest'effetto, la proposta si riduce immediatamente al secondo grado.*

riconoscesi facilmente che qualora si sommi z^2 con ciascun membro, il primo diviene un quadrato perfetto

$$z^4+2z^3+2z^2+2z+1+z^2=(z^2+z+1)^2$$

si ha dunque

$$(z^2+z+1)^2=\frac{m^2}{a^2}z^2+z^2,$$

di dove

$$z^2+z+1=\pm z\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+1}$$

il che riducesi a

$$z^2+\frac{a\mp\sqrt{m^2+a^2}}{a}z+1=0.$$

Questa equazione debb' essere considerata come equivalente a due equazioni di secondo grado, per motivo delle due forme, di cui è suscettibile il coefficiente del suo secondo termine e facendo, per abbreviare, $\sqrt{m^2+a^2}=n$, essa dà successivamente

$$z^2+\frac{a-n}{a}z+1=0$$

$$z^2+\frac{a+n}{a}z+1=0.$$

Se si denotano per z', z'' le due radici della prima, e per z''', z'''' quelle della seconda, avremo, in virtù dell' ultimo termine eguale all' unità,

$$z'z''=1;\qquad z'''z''''=1;$$

e siccome z esprime la *tangente* d'un angolo presa supposto il raggio$=1$, ne segue che i valori z' e z'' appartengono a due angoli *complementi* l'uno dell' altro, e che lo stesso succede a riguardo di z''' e z'''' (9), conformemente a ciò, ch' è stato osservato nella pag. 101.

Risolvendo l' equazioni suddivisate, si ottiene per la prima

$$z=-\frac{a-n}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(a-n)^2-4a^2},$$

per la seconda

$$z = -\frac{a+n}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2};$$

ma

$$\sqrt{(a-n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n+a)(n-3a)},$$
$$\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n-a)(n+3a)};$$

e poichè $n = \sqrt{m^2+a^2}$ sorpassa necessariamente a, si vede che i due ultimi valori di z saranno sempre *reali*, laddovechè i due primi diverranno *immaginari* allorchè avremo $n < 3a$.

Prima d'arrivare a questo punto i medesimi valori diventeranno eguali se $n = 3a$, vale a dire se $\sqrt{m^2+a^2} = 3a$; e facendo svanire i radicali, s' ottiene

$$m^2 + a^2 = 9a^2;$$

donde

$$m^2 = 8a^2, \text{ ovvero } m = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2};$$

ciò che dimostra che non potremo condurre nell'angolo BAC pel punto E alcuna retta minore di $2a\sqrt{2}$.

La quantità n essendo allora $\sqrt{8a^2+a^2} = 3a$, i due primi valori di z divengono eguali a 1, e gli altri due sono $-2 \pm \sqrt{3}$. Segue da ciò che le due linee D′F′ e D″F″ si confondono facendo con AB un angolo di 0°, 5.

Nel caso generale, se si fa

$$\sqrt{(a-n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n+a)(n-3a)} = p,$$
$$\sqrt{(a+n)^2 - 4a^2} = \sqrt{(n-a)(n+3a)} = q,$$

conseguiremo pei quattro valori di z

$$z' = -\frac{a-n-p}{2a}, \quad z'' = -\frac{a-n+p}{2a},$$

$$z''' = -\frac{a+n-q}{2a}, \quad z'''' = \frac{a+n+q}{2a}.$$

Conoscendo le tangenti z', z'', z''', z'''', ne concluderemo i valori di y col mezzo dell' equazione

$$y = az + a \quad \text{(pag. 101)}.$$

Questi valori saranno respettivamente

$$AD' = -\frac{a-n-p}{2} + a = \frac{a+n+p}{2}$$

$$AD'' = -\frac{a-n+p}{2} + a = \frac{a+n-p}{2}$$

$$AD''' = -\frac{a+n-q}{2} + a = \frac{a-n+q}{2}$$

$$AD'''' = -\frac{a+n+q}{2} + a = \frac{a-n-q}{2}$$

Essi si costruiran facilmente; poichè la quantità n è l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo, di cui i lati sono a e m; le linee p e q s' ottengono pure col mezzo dei triangoli rettangoli (69), ovvero colle medie proporzionali(70); ed allorchè avremo le lunghezze delle quattro rette suddivisate, i punti D', D'', D''', D'''' saranno dati (*).

79. In luogo di prendere per incognita l' angolo, che dee far con AB la retta dimandata, sarebbesi potuto cercare di determinar la distanza tra il punto dato E ed il punto K, mezzo della linea D'F', per concluderne D'E. Facendo $EK = x$, e ponendo, per abbreviare,

$F'K = D'K = \frac{m}{2} = l$, sarebbesi avuto

$$D'E = D'K + EK = l + x, \quad F'E = F'K - EK = l - x$$

$$F'H = \sqrt{\overline{EF'}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{(l-x)^2 - a^2};$$

ed i triangoli simili D'GE, EHF' avrebbero dato

$$D'E : EG :: EF' : F'H;$$

(*) *Se si paragona l' analisi, che ho fatta, delle diverse circostanze del problema di sopra con quella, che si trova nell'* Algebra *di* Bezout *(* 3.° *Vol. del* Corso ad uso della Marina, *edizione del* 1781, *pag.* 334*) vedremo quanto quest' ultima è incompleta e fallibile; essa non indica se non che le due soluzioni rappresentate dalle linee D'F' e D''F''.*

ciò, che riducesi a

$$l+x : a :: l-x : \sqrt{(l-x)^2-a^2},$$

di dove si sarebbe dedotta l'equazione

$$a(l-x)=(l+x)\sqrt{(l-x)^2-a^2},$$

la quale, per l'elevazione al quadrato, e pel suo sviluppo, sarebbe divenuta

$$x^4-(2l^2+2a^2)x^2+l^4-2a^2l^2=0;$$

e potendo risolverla come quelle di secondo grado, se ne sarebbe ricavato in primo luogo

$$x^2=l^2+a^2\pm\sqrt{a^4+4a^2l^2},$$

dipoi

$$x=\pm\sqrt{l^2+a^2\pm\sqrt{a^4+4a^2l^2}}=\pm\sqrt{l^2+a^2\pm a\sqrt{a^2+4l^2}}$$

espressioni facili a costruirsi dietro ciò, che abbiamo veduto nei num.[i] 69 e 70.

Questa soluzione così notabile per la sua eleganza è ricavata dall' *Aritmetica universale*: *Newton* l'ha data per far vedere come una felice scelta d' incognite semplifichi la soluzion d'un problema. Ciò, ch'egli ha fatto nel problema, di cui mi occupo, gli è senza dubbio stato suggerito dalla considerazione che la distanza EK non può avere che due grandezze diverse, una relativa alle due soluzioni D'F' e D''F'', e l'altra alle soluzioni D'''F''' e D''''F'''', e che in conseguenza i suoi quattro valori debbono, fatta astrazione dal segno, essere eguali due a due. Concluderò da ciò che per determinarsi nella scelta dell' incognita, bisogna cercar quella, che nelle diverse circostanze, che può offrire il problema, subisca il minor numero di cangiamenti.

80. Il picciol numero de' problemi risoluti precedentemente serve per far vedere come l'Algebra possa applicarsi alla soluzion dei medesimi. Abbiam dovuto conoscere da questi esempi che le circostanze concernenti la situazion delle linee possono sempre esser dedotte dalla considerazion dei triangoli, e mediante le proprietà di queste figure esprimersi algebricamente. L'arte di formare i triangoli, di cui si tratta, e che resultano, tanto esplicitamente, che implicitamente, dalle condizioni del problema proposto, non

può, come la facilità di porre in equazione i problemi numerici, acquistarsi se non che con l'assuefazione (*).

Le diverse espressioni costrutte in quel, che precede, non si riportano che a linee, perchè i problemi, che ci han condotto alle medesime, non hanno altro fine che la determinazion delle linee; e questo è ciò, che accade il più spesso, poichè la determinazione delle figure riducesi sempre a quella delle lor dimensioni. Frattanto può presentarsi qualche caso dove si cerchi immediatamente un' *area* o un *volume*; l'espressione, alla quale si arriva, dee, se dessa è omogenea, avere nel primo caso a ciascun termine del suo numeratore due fattori di più che a quelli del suo denominatore, e tre nel secondo caso.

Per esempio, l'espressione $\frac{ab^2c-a^3d+d^4}{c^2+ad}$ può denotare un area, e l'espressione $\frac{a^7+b^5c^2-d^7}{a^4+b^4}$ un volume. Nell' espressione finale del n.° 65 la lettera m non dee contarsi, perchè dessa esprime un rapporto, e non una linea.

Costruire questa espressione vuol dire far un rettangolo, l'area del quale sia equivalente alla prima, ed un paralelepipedo rettangolo, di cui il volume sia equivalente alla seconda; e perciò si prepara, mediante l'artifizio analitico del n.° 68, la prima formula di maniera ch' essa riducasi ad un prodotto di due fattori, la seconda in modo ch' essa diventi un prodotto di tre fattori.

Infatti, se si prendono

$$ab^2c=m^3k\,,\qquad a^3d=m^3k'\,,\qquad d^4=m^3k''\,,$$
$$c^2=mk'''\,,\qquad ad=mk''''\,,$$

la quantità m resterà arbitraria, le quantità k, k', k'',

(*) L' Aritmetica universale di Newton *contiene una collezione di problemi tanto preziosa per l'eleganza delle soluzioni quanto per la varietà degli enunciati*: *la* Geometria di posizione di Carnot *ne contiene degl' interessantissimi*, *e che conducono a proprietà considerabilissime dell' estensione. La lettura di quest'opera*, *e di quelle di* Tommaso Simpson *sarà utilissima alle persone*, *le quali vorranno esercitarsi nella risoluzion dei problemi.*

k''', k'''' si determineranno colle linee proporzionali, ed avremo

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad} = \frac{m^3k - m^3k' + m^3k''}{mk''' + mk''''};$$

$$= \frac{m^2(k - k' + k'')}{k''' + k''''} = m \times \frac{m(k - k' + k'')}{k''' + k''''};$$

resultato il quale può essere riguardato come l'area d'un rettangolo, di cui la base fosse m, e di cui l'altezza fosse la linea rappresentata dalla formula

$$\frac{m(k - k' + k'')}{k''' + k''''}.$$

Poichè è in nostro arbitrio di prendere a piacimento la linea m, possiamo farla eguale ad una delle quantità impiegate nell'espressione da costruirsi, ovvero all'unità, mentre se ne sia prescelta una. L'esempio di sopra esposto si semplicizza molto allorchè si prende $m = a$; si conseguisce allora

$$b^2c = a^2k, \quad d = k', \quad d^4 = a^3k'',$$
$$c^2 = ak''', \quad d = k'''',$$

e

$$\frac{ab^2c - a^3d + d^4}{c^2 + ad} = \frac{a^3(k - d + k'')}{a(k''' + d)}$$

$$= a \times \frac{a(k - d + k'')}{(k''' + d)}.$$

Questo metodo s'applica facilmente alla seconda espressione proposta

$$\frac{a^7 + b^5c^2 - d^7}{a^4 + b^4}.$$

Prendendo immediatamente a in luogo della quantità arbitraria m, faremo

$$b^5c^2 = a^6k, \quad d^7 = a^6k', \quad b^4 = a^3k'',$$

ed otterremo

$$\frac{a^7 + b^5c^2 - d^7}{a^4 + b^4} = \frac{a^7 + a^6k - a^6k'}{a^4 + a^3k''}.$$

$$= \frac{a^6(a + k - k')}{a^3(a + k'')} = a^2 \times \frac{a(a + k - k')}{a + k''}.$$

L'ultima formula può essere evidentemente presa pel volume del paralellepipedo rettangolo, la base del quale è il quadrato costrutto sulla linea a, e l'altezza è la linea retta rappresentata dalla formula.

$$\frac{a(a+k-k')}{a+k''}.$$

81. L'Algebra serve non solamente a trovare la grandezza delle linee e delle parti dell' estensione paragonate le une coll' altre, ma essa somministra ancora il mezzo di determinar le figure formate da queste linee, ed in generale le formule dello spazio. *Descartes*, osservando il primo che queste figure e queste forme stabiliscono delle relazioni di grandezza tra rette, è arrivato ad applicar l'Algebra alla Teorica delle Linee in generale, e mediante questa scoperta le Matematiche hanno interamente cangiato d'aspetto.

Fig.34. Se si concepisca, per esempio, che da tutti i punti d'una linea qualunque DE, *fig.* 34, si sieno abbassate delle perpendicolari PM, P'M', P''M'', ec. sopra una linea retta AB data di posizione, e che a partire da un punto A preso a piacere su questa linea siensi misurate le distanze AP, AP', AP'', ec., ciascuna di queste distanze e le perpendicolari, che lor corrispondono, saranno collegate tra loro in modo che una di esse si concluderà necessariamente dall'altra. Infatti, quando la grandezza di AP sarà fissata, l'incontro della curva DE con la perpendicolare alzata dal punto P sulla linea AB darà la grandezza di PM; e quando avremo questa grandezza, che supporrò rappresentata da ab, otterremo AP prendendo sopra AC, perpendicolare ad AB, una parte AQ$=ab$, e conducendo in seguito la retta QM paralella ad AB, la quale incontrerà la linea DE in un punto M, pel quale avrem necessariamente PM$=ab$.

Nulla c'impedisce d'immaginare che le linee AP, PM sien riportate ad una linea comune presa per unità, e che sotto questo punto di vista esse non sieno rappresentate da numeri, o da lettere. Se la relazione ch'è tra AP e PM, tra AP' e P'M', ec., può esser espressa da un'equazione algebrica, questa equazione caratterizzerà la linea DE, e potrà farne conoscere successivamente tutti i suoi punti: questo e ciò, che vedremo adesso sopra due semplicissimi esempì.

Fig.35. 82. Prendo per primo esempio la retta AE, *fig.* 35, condotta pel punto A; tutte le perpendicolari PM, P'M',

P''M'', ec. abbassate da ciascun de' suoi punti sulla linea AB determineranno una serie di triangoli APM, AP'M', AP'M', ec. tutti simili tra loro, e che daranno

$$AP : PM :: AP' : P'M' :: AP'' : P''M'', \text{ec.}$$

ovvero, ciò che riducesi allo stesso,

$$\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP'} = \frac{P''M''}{AP''}.$$

La relazione di tutte le distanze AP dalle perpendicolari PM è in questo caso facile a conoscersi, essa consiste nel rapporto costante, che ciascuna delle prime ha con quella delle seconde, che le corrisponde; e se si denoti questo rapporto per a, avremo

$$PM = a \times AP,\ P'M' = a \times AP',\ P''M'' = a \times AP'', \text{ ec.}$$

Tutte queste equazioni, le quali sembrano particolari per ciascun punto della retta AE, possono esser comprese in una sola, denotando la distanza dal piede della perpendicolare al punto A, qualunque essa siasi, per x, e rappresentando la perpendicolare stessa per y; poichè avremo allora $y = ax$. Questa equazione, la quale contiene due incognite x e y, non può dare il valore che d'una sola, e ciò dopo che avremo determinato arbitrariamente il valore dell' altra: allorchè si assegna a x un valore qualunque AP, y prende il valore corrispondente PM. Se si ha, per esempio, $a = \frac{1}{2}$ si trova $PM = \frac{1}{2}AP$, vale a dire che prendendo PM eguale alla metà di AP il punto M è sulla retta AE, e non altrimenti.

La linea AE non si termina a un tratto nel punto A; si dee, per abbracciare tutta la sua estensione, concepirla prolungata in AE' al disotto della linea AC, ed a sinistra della linea AC. Quest'ultima parte è compresa pure nell'equazione $y = ax$; poichè si posson dare a x in quest'equazione dei valori *negativi*, e questi valori esprimendo le distanze dalla linea AC, debbono esser presi dal lato opposto a quello ove si son portati i valori *positivi* (76): essi daranno dunque dei punti tali come p, posti in addietro del punto A. Ma i valori corrispondenti di y essendo pur *negativi*, debbono esser presi dal lato opposto a quello ove si son portati i valori *positivi*, vale a dire al disotto di AB, come pm; ed è manifesto d'altronde che, se Ap è preso

eguale ad AP, *pm* sarà parimente eguale a PM: caderem dunque in questa maniera sui punti del prolungamento AE′ della retta AE.

83. Considero in secondo luogo il circolo descritto dal Fig. 36. punto A, *fig.* 36, come centro, e con un raggio eguale alla linea AD. Ciò, che distingue i punti della circonferenza dagli altri punti del piano, d' esser tutti ad una medesima distanza dal centro A, la quale sia eguale al raggio AD; ed in conseguenza in qualunque parte che si prenda il punto M su questa curva, le rette AP e PM saranno i lati d' un triangolo rettangolo, di cui l' ipotenusa AM sarà eguale ad AD. Facendo dunque

$$AP = x, \quad PM = y, \quad AD = r,$$

avremo

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

e ricaveremo da ciò

$$y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

equazione, col mezzo della quale dandosi un valore a x, ovvero AP, avremo col soccorso del calcolo, e senza che siavi bisogno di costruir la figura, y, ovvero PM, o almeno il rapporto di questa linea col raggio. Prendendo per esempio $x = \frac{1}{3} r$, otterremo

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{1}{9} r^2} = \sqrt{\frac{8}{9} r^2} = r \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Concepirem facilmente che si posson dedurre dalla medesima espressione le linee PM per tutti i punti della linea AB compresi tra A e D. L' equazione $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ prova egualmente che la descrizione geometrica della circonferenza del circolo, che questa curva non debb' estendersi al di là del punto D; poichè, per prendere il punto P al di là di detto punto, farebbe di mestieri supporre $x > AD$, ovvero $> r$, ed in questo caso il valore di y diverrebbe *immaginario*.

Benchè io non abbia considerato se non che il quadrante DE, gli altri tre, i quali completano la circonferenza, sono compresi nell' equazione $x^2 + y^2 = r^2$; poichè l' ordinata y avendo per un medesimo valor di x due valori, cioè

$$+\sqrt{r^2-x^2}, \quad \text{e} \quad -\sqrt{r^2-x^2},$$

il secondo debb'esser portato dal lato opposto al primo (76), e somministra per conseguenza tutti i punti del quadrante DE'. Ma si posson dare a x dei valori *negativi*, i quali debbon portarsi da A in D', poichè i valori *positivi* sono stati portati da A in D, ed a ciascuno di questi valori corrisponderanno due valori di y: il valor *positivo* darà i punti del quadrante D'E, ed il valor *negativo* i punti del quadrante D'E'.

84. Benchè non si ricavino dall'equazioni

$$y=ax, \qquad y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$

che valori appartenenti a punti sempre disgiunti, nulladimeno la continuità, la quale resulta dalla descrizion della linea retta e del circolo, che si rappresentano respettivamente da queste equazioni, non è punto violata, perchè si possono sempre determinare col loro mezzo due punti tanto vicini l'uno all'altro quanto vorremo; poichè basta per questo di prender per x due valori consecutivi quasi eguali, e nulla non limita la piccolezza della differenza, che si può por fra di loro.

85. Questa maniera di rappresentare il *corso* delle linee, vale a dire le circostanze della lor forma e della lor situazione riportandole ad una retta con perpendicolari, merita la più grande attenzione; si vede che dessa riducesi a determinare la posizione d'un punto qualunque col mezzo della sua distanza da due rette AB ed AC perpendicolari tra loro. Il punto M *fig.* 34, è difettoso determinato allorchè si hanno le distanze AP e AQ, poichè Fig. 34. esso si trova all'intersezione delle linee PM e QM condotte pei punti P e Q paralellamente alle rette AB ed AC.

Le linee AP ed AQ, e le loro eguali QM e PM si dicono *coordinate*. Ci serviamo ordinariamente della parola *ascissa* per denotar quella, che si suppone cognita, e si dà all'altra il nome d'*ordinata*. Così, negli esempi precedenti, ove ho sempre espresse le linee PM col mezzo delle linee AP, PM era l'*ordinata* ed AP l'*ascissa*. Le linee AB ed AC, le quali determinano la direzion delle *coordinate*, si chiamano gli *assi delle coordinate*.

Bisogna osservar bene che nei punti situati sulla linea AB la distanza AQ o PM è nulla, e che in conseguenza, se dessa si rappresenti per y, abbiamo per tutti questi punti $y=0$; per la medesima ragione si ha QM o AP, ov-

vero $x=0$ per tutti quelli, i quali son posti sull'asse AC; e finalmente nel punto A, il quale dicesi l'*origine delle coordinate*, si ha nel tempo medesimo

$$x=0, \quad y=0.$$

Non dando che i valori assoluti dell'ascissa AP e dell'ordinata PM, il punto M resta ancora indeterminato a qualche riguardo; perchè non si conoscono allora che le distanze di questo punto dalle rette indefinite BB' e CC',
Fig. 37. *fig.* 37; e conservando queste distanze medesime, potrebbe detto punto trovarsi indifferentemente in uno qualunque dei quattro angoli retti BAC, B'AC, B'AC' BAC'; ma le combinazioni dei segni affetti alle coordinate AP e PM fanno conoscere in quale di questi angoli si trova il punto proposto. Infatti, essendo convenuto di dare il segno + alle parti della linea AB andando da A verso B, il segno — sarà quello, che bisognerà assegnare alle parti di AB' andando da A verso B'. Parimente, se abbiam dato il segno + alle parti di AC andando da A verso C, le parti di AC' andando da A verso C' saranno necessariamente affette del segno —. Ciò posto, avremo

pel punto M dell' angolo	BAC, ...	+ AP + PM	ovvero	$+x$ $+y$
	B'AC, ...	— AP + PM		$-x$ $+y$
	B'AC', . . .	— AP — PM		$-x$ $-y$
	BAC', ...	+ AP — PM		$+x$ $-y$.

La scelta delle linee AB ed AC perpendicolari tra loro non è la sola, che possa farsi per determinare sopra di un piano la posizione d'un sistema qualunque di punti, qualunque combinazione di linee capace di fissare la posizione d'un punto, per esempio, le sue distanze da due punti dati, sarebbe egualmente propria a quest'uso, ma nel maggior numero di casi le *coordinate perpendicolari* son quelle, l'impiego delle quali presenta maggiore facilità, e vedremo in seguito più esempî della maniera, mediante la quale si passa da queste coordinate alle diverse maniere d'assegnar sopra un piano la posizione dei punti.

86 L'equazione, la quale esprime le relazioni tra le AP e le PM per una linea data, si chiama l'*equazione*

di questa linea; e viceversa quest' ultima si chiama il *luogo* dell' equazione, alla quale dessa appartiene.

È manifesto che qualunque problema geometrico *indeterminato* contenendo due incognite, conduce ad un *luogo geometrico.* Se si trattasse, per esempio, di formar tutti i triangoli rettangoli, che si possono costruire sopra un'ipotenusa data a, chiamando x e y i lati dell' angolo retto di questi triangoli, l' equazione del problema sarebbe $x^2+y^2=a^2$; e si soddisfarebbe al problema col descrivere sopra un raggio eguale ad a un quarto di circolo, ed abbassare da tutti i punti di questo quarto di circolo delle perpendicolari sopra un suo raggio: il quarto di circolo sarebbe il *luogo* di tutti i vertici d' uno degli angoli acuti di questi triangoli.

L' equazion d' una curva s' ottien sempre esprimendo analiticamente o una qualunque delle sue proprietà, come lo abbiam fatto per la linea retta, o le circostanze della sua descrizione, così come ne abbiamo usato a riguardo del circolo. Reciprocamente, un' equazione qualunque, considerata in sè stessa, dà pur origine ad una curva, della quale essa fa conoscere le proprietà Quest' ultimo punto di vista essendo il più generale ed il più fecondo, perciò d'ora in avanti dedurrò le linee dalla considerazione dell' equazioni.

87. Di tutte l' equazioni a due *indeterminate* la più semplice è quella di primo grado; ed essa appartiene alla linea retta la più semplice di tutte le linee. Quest' equazione può essere rappresentata da $Cy=Ax+B$; ma dividendola per C, essa non perderà nulla della sua generalità, e diverrà $y=\frac{A}{C}x+\frac{B}{C}$, ovvero $y=ax+b$, facendo $\frac{A}{C}=a$, $\frac{B}{C}=b$; è sotto questa forma ch'io impiegherò d' ora in avanti questa equazione.

Supponendo primieramente che b sia nullo, avremo

$$y=ax, \text{ ovvero } \frac{y}{x}=a,$$

vale a dire che in tutta l' estension della retta il rapporto di PM ad AP, *fig.* 35, sarà costante. Questa proprietà, Fig. 35.
la quale altro non è che l' espressione della similitudine dei triangoli APM, AP′M′, ec., e dalla quale resulta che

$\frac{PM}{AP} = \frac{P'M'}{AP''}$, ec. in qualunque parte si prendano i punti P, P', ec. sulla linea AB, non può appartener che alla linea retta AE condotta pel punto A, origine delle coordinate.

Il rapporto $\frac{y}{x}$ ovvero il coefficiente a, dipende dall' angolo, che fa la retta AE con l' asse dell' ascisse AB; ma nel triangolo APM, ch' io suppongo rettangolo in P, il rapporto di PM ad AP è eguale alla tangente dell' angolo PAM (30); a rappresenta dunque la tangente di quest' angolo.

Considerando l' equazione $y=ax+b$, si vede che la nuova ordinata y non differisce dalla prima $y=ax$ che in questo, cioè, ch' essa la sorpassa della quantità b; dal che ne segue che, se si prenda AD$=b$, e che si conduca la linea DF paralella ad AE, dessa sarà il *luogo* dell' equazione $y=ax+b$; poichè avremo

$$PN = PM + MN = PM + AD,$$
$$P'N' = P'M' + M'N' = P'M' + AD, \text{ ec.};$$

e bisogna osservar bene che il coefficiente a resterà lo stesso per tutte le rette paralelle ad AE.

È facil vedere che niente nell' equazione $y=ax+b$ limita i valori, che si posson dare a x, e che in conseguenza quelli di y diverranno tanto grandi quanto vorremo; ma nel medesimo tempo nulla limitando il corso della linea DF nello spazio indefinito BAC, troverem sempre delle ascisse e delle ordinate tanto grandi quanto basti per rappresentare i valori di y e di x, i quali soddisfaranno all' equazione proposta.

Facendo $x=0$, avremo $y=b$, e questo valore apparterrà al punto D, dove la retta DF incontra l' asse AC delle ordinate. Allorchè x sarà negativo, troveremo

$$y = -ax + b,$$

ed ax essendo minore di b, y sarà sempre positivo, ma minore di b, ovvero di AD. Il corso della linea DF dimostra che questa circonferenza non può aver luogo che nella parte DF' corrispondente ad ascisse Ap, situate dal lato opposto dell' ascisse AP, che io aveva scelto per

rappresentare i valori positivi di x; è dunque da questo lato che bisogna prendere i valori negativi di x.

Per trovar il valore di x, che corrisponde al punto f, ove la linea DF incontra l'asse AB dell'ascisse, bisogna fare $y=0$; il che dà

$$ax+b=0, \quad \text{e} \quad x=-\frac{b}{a}=Af.$$

Allorchè x restando sempre negativo sarà divenuto maggiore della quantità $\frac{b}{a}$, lo stesso y diverrà negativo; ma al di là del punto f la linea DF si trova al disotto della linea AB; l'ordinata $p'n'$ caderà dunque da un lato opposto a quello dov'essa era situata in principio; e per conseguenza i valori negativi di y debbono portarsi da un lato della linea AB opposto a quello, che si è adottato pei valori positivi.

Queste osservazioni, le quali confermano ciò, che si è detto nel n.° 76, non sono particolari alla linea retta. Non vi si potrebbe far mai troppo attenzione, poichè è dall'uso delle quantità negative nelle figure che dipendono in gran parte le diverse forme, dalle quali sono affette le linee curve.

L'equazione $y=ax+b$ non contenendo che due costanti a e b, il valor delle quali particolarizza la retta, che si considera, distinguendola da qualunque altra, ne segue che due condizioni sono bastanti per determinar questa retta. Quelle, che si offron le prime, sono d'assoggettare la detta linea a passar per due punti dati, ovvero ed essere paralella o perpendicolare a una retta data, ed inoltre a passare per un punto dato. Avremo in seguito bisogno di conoscer la forma, che prende l'equazione $y=ax+b$ per soddisfare a queste diverse condizioni: ecco perchè vado ad esaminarle ciascuna in particolare.

88. Se si cerca l'equazione della linea retta, che passa per due punti, le ascisse dei quali sieno α e α', e le ordinate ϵ e ϵ', porremo successivamente α e α', in luogo di x, ϵ e ϵ' in luogo di y, ed avremo, per determinar a, e b, le due equazioni.

$$\left.\begin{aligned} \epsilon &= a\alpha+b \\ \epsilon' &= a\alpha'+b \end{aligned}\right\} \text{ dalle quali ricaveremo } \left\{\begin{aligned} a &= \frac{\epsilon'-\epsilon}{\alpha'-\alpha} \\ b &= \frac{\alpha'\epsilon-\alpha\epsilon'}{\alpha'-\alpha} \end{aligned}\right.$$

e ne resulterà

$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}$$

per l'equazione della retta cercata.

Si può dare a questo resultato una forma più semplice; poichè, se si toglie dall' equazione $y=ax+b$ una delle due equazioni di sopra, per esempio la prima, b disparirà, ed otterremo

$$y-\beta=a(x-\alpha);$$

quest' ultima eqnazione sarà quella d' una linea retta assoggettata a passare pel punto, di cui le coordinate sono α e β, e che faccia d' altronde con l'asse AB un angolo qualunque: ponendovi in luogo di a il valore trovato precedentemente, avremo

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha).$$

La distanza dei punti proposti, ovvero la parte, ch'essi intercettano sulla retta cercata, avrà per espressione

$$\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2},$$

ciò è manifesto evidentemente, supponendo che N e N' rappresentino questi punti; poichè la loro distanza NN' essendo l'ipotenusa del triangolo rettangolo NRN', ne segue che

$$\overline{MN}^2=\overline{NR}^2+\overline{N'R}^2=(AP'-AP)^2+(P'N'-PN)^2.$$

89. Per ottenere l'equazion della linea retta, la quale passasse pel punto, di cui le coordinate sono α e β, e che fosse paralella alla linea rappresentata dell' equazione $y=a'x+b'$, servirà di sostituire a' in luogo di a nell' equazione $y-\beta=a(x-\alpha)$, la quale digià soddisfa alla prima condizione; poichè, secondo il n.° 87, il coefficiente di x è lo stesso nell'equazioni delle linee rette paralelle tra loro: avrem dunque per quella, che cercasi,

$$y-\beta=a'(x-\alpha).$$

Fig. 38. 90. Finalmente, se AE ed AI, *fig.* 38, sono due rette perpendicolari tra loro, che passino per l'origine A, e che sull' ascissa AP s' alzino le ordinate PM e PM', si trova, paragonando i triangoli APM e APM', che il rap-

porto di AP a PM è inverso del rapporto di AP a PM′; di maniera che, se a è il coefficiente di x nell' equazione di AE (87), questo coefficiente sarà $\frac{1}{a}$ in quella di AI. Ma le ordinate di quest' ultima cadendo al disotto di AB, debbono, pel n.° 76, essere affette dal segno —; l'equazioni delle rette AE, AI saran dunque

$$y = ax, \qquad y = -\frac{1}{a}\ (*).$$

(*) *Arrivasi pure a questo resultato senza appoggiarsi al n.° 76; poichè l' inclinazione o angolo delle due rette AM, AM′, fig. 39, che passano per l' origine, determina la forma del triangolo compreso tra i punti M e M′ corrispondenti alla medesima ascissa AP e l'origine A; triangolo, di cui i lati son facili a calcolare col mezzo dell' equazioni di queste rette, ch' io già suppongo* Fig. 39.

$$y = ax, \qquad y = a'x.$$

Infatti, *se* $AP = x$, *si ha* $PM = ax$, $PM' = a'x$,

$$MM' = PM - PM' = ax - a'x;$$

i triangoli rettangoli APM, APM′ danno

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + a^2x^2,$$

$$\overline{AM'}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM'}^2 = x^2 + a'^2x^2;$$

e quando queste rette divengono perpendicolari tra loro, il triangolo MAM′ divien rettangolo in A; MN′, la quale n' è allora l' ipotenusa, dee soddisfare all' equazione

$$\overline{MM'}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AM'}^2,$$

che i valori suddivisati cangiano in

$$(ax - a'x)^2 = 2x^2 + a^2x^2 + a'^2x^2.$$

Sviluppata, ridotta e divisa per $2x^2$, *essa riducesi* $a - aa' = 1$, *di dove concludesi* $a' = -\frac{1}{a}$, *come qui sopra.*

E' bene osservare che il segno — indica qui il cangiamento, che dee subir la figura quando l' angolo MAM′ divien retto; circostanza, la qual non permette più che le

Considerando in seguito le rette DF, GH, respettivamente paralelle alle rette AE ed AI, ed in conseguenza perpendicolari tra loro, troveremo per le loro equazioni

$$y = ax + b, \text{ e } y = -\frac{1}{a}x + b' \text{ (n.° preced.).}$$

Se la seconda dee passar per un punto, di cui le coordinate sieno α e ϵ, la sua equazione diverrà

$$y - \epsilon = -\frac{1}{a}(x - \alpha).$$

91. Due linee, le quali si tagliano, hanno al loro punto d' intersezione le medesime coordinate; dimodochè, per trovar quelle del punto d' incontro delle due rette date dall' equazioni

$$y = ax + b,$$
$$y = a'x + b',$$

altro non dee farsi che supporre che l' incognite x e y hanno il valore medesimo nell' una, e nell' altra equazione: avremo in tal maniera

$$ax + b = a'x + b';$$

il che darà

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}, \text{ e } y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

Si fa manifesto da questi valori che il punto di concorso è tanto più lontano dagli assi AB ed AC quanto più la quantità $a' - a$ è minore, e che finalmente x e y divengono infiniti allorchè $a' = a$, vale a dire allorchè le rette proposte cessano d' incontrarsi, ovvero son paralelle.

92. Può esser utile di conoscere la lunghezza della perpendicolare abbassata da un punto dato sopra una retta data; e vi arriveremo cercando le differenze tra le coordinate di questo punto, e quelle del punto dove la retta data incontra la linea, che le è perpendicolare.

---

due linee AM ed AM' sieno dal medesimo lato dell' asse AB, come s' era supposto in principio; l' Algebra opera dunque sulla situazione di queste linee un raddirizzamento analogo a quello, che ha luogo per le soluzioni negative nei problemi numerici (*Vedete gli* Elementi d' Algebra.)

L'equazion della prima essendo

$$y = ax + b,$$

quella della seconda sarà

$$y - \epsilon = -\frac{1}{a}(x - \alpha),$$

se α e ϵ denotano le coordinate del punto dato; ma si può porre l'equazione $y = ax + b$ sotto la forma.

$$y - \epsilon = ax + b - \epsilon - a\alpha + a\alpha,$$

la quale riducesi a

$$y - \epsilon = a(x - \alpha) + b - \epsilon + a\alpha;$$

ed unita a $y - \epsilon = -\frac{1}{a}(x - \alpha)$, essa darà

$$x - \alpha = \frac{a(\epsilon - a\alpha - b)}{1 + a^2}, \; y = \epsilon = -\frac{\epsilon - a\alpha - b}{1 + a^2}.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione

$$\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \epsilon)^2} \text{ (88)},$$

avremo, per la lunghezza della perpendicolare cercata,

$$\frac{\epsilon - a\alpha - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

93. Ciò che precede, conduce all'espressione del *seno*, del *coseno* e della *tangente* dell'angolo; che formano tra di loro due rette date. Sieno

$$y = ax + b, \qquad y = a'x - b',$$

l'equazioni delle due rette proposte: è manifesto che l'angolo, ch'esse fanno fra loro, non muterebbe se si facessero muovere ambedue paralellamente a sè stesse fino a tanto che desse passassero per l'origine delle coordinate; ed allora le loro equazioni si ridurranno a

$$y = ax, \qquad y = a'x \text{ (87)}.$$

In questo stato appunto io le considererò, e le rappresenterò colle linee AM ed AM', *fig.* 40. Avendo preso sopr'una di esse un punto M', le cui coordinate son denotate per α e ϵ, la perpendicolare MM', abbassata da que- Fig. 50.

sto punto sull' altra linea AM, sarà espressa da $\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1+a^2}}$, a motivo di $b=0$, (92); ma, se si faccia $AM'=r$, le coordinate del punto A essendo nulle, avremo

$$\alpha^2 + \varepsilon^2 = r^2;$$

e perchè il punto M' è sulla linea AM', l'equazion della quale è $y=a'x$, ne seguirà $\varepsilon = a'\alpha$. Questa equazione combinata con la precedente darà

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{1+a'^2}}, \quad \varepsilon = \frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2}};$$

sostituendo questi valori in quelli della perpendicolare, troveremo

$$\frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+a'^2}}:$$

e se si dà alla perpendicolare MM' il nome di *seno*, che le abbiamo assegnato nella *Trigonometria*, avremo

$$\text{sen MAM}' = \frac{r(a'-a)}{\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{1+a'^2}},$$

prendendo r per raggio.

Se si tolga da r^2 il quadrato di questa espressione, avremo quella di $\overline{AM}^2$, ovvero del quadrato del coseno dell'angolo MAM', cioè

$$\frac{r^2(1+a^2)(1+a'^2) - r^2(a'-a)^2}{(1+a^2)(1+a'^2)} = \frac{r^2(1+2aa'+a^2a'^2)}{(1+a^2)(1+a'^2)};$$

e prendendo la radice quadrata, otterremo

$$\cos \text{MAM}' = \frac{r(1+aa')}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}};$$

finalmente, facendo $r=1$, ricaveremo da queste due espressioni,

$$\text{tang MAM}' = \frac{\text{sen MAM}'}{\cos \text{MAM}'} = \frac{a'-a}{1+aa'}.$$

Avrei potuto dedurre immediatamente quest' ultimo valore dalla formula

$$\tang(p \pm q) = \frac{\tang p \pm \tang q}{1 \pm \tang p \tang q}$$

riportata nella *Tavola* della pag. 34, poichè l'angolo MAM' è la differenza degli angoli BAM' e BAM, e che in conseguenza, se si denotino questi ultimi per p e q, avremo

$$\tang p = a', \ \tang q = a, \ \text{e} \ \tang(p-q) = \frac{a'-a}{1+aa'},$$

come qui sopra; ma questa formula riposa su quelle del num.° 11, ottenute col mezzo d'una costruzione, ed io mi sono proposto di ricavare dalle sole equazioni delle linee tutto ciò, ch'è necessario per l'applicazione dell' *Algebra* alla *Geometria*.

94. L'equazione del circolo ottenuta nel num. 83 non è che particolare; perchè si è dato al centro una situazione determinata ponendolo nell' origine delle coordinate. Per generalizzar l' equazione di questa curva bisognerà aver l'equazione del circolo DED'E', *fig* 36, prendendo per origine delle coordinate il punto A''' situato in una maniera qualunque per rapporto al centro A; e per questo, sarebbe bastante di scrivere analiticamente che la distanza da questo centro a ciascuno dei punti della circonferenza è eguale a r. Ora, se si denotino per p e q le linee A'''A' ed A'A, le quali saranno allora le coordinate del centro A per rapporto agli assi A'''B' ed A'''C', e si faccia $A'''Q = x$, $QM = y$, avremo (88) Fig. 36.

$$AM = r = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2},$$

di dove ricaveremo, quadrando i due membri, e sviluppando,

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2.$$

Quest' ultima equazione è la più generale, che possa ottenersi pel circolo riportandolo a coordinate rettangole: dessa non può esser particolarizzata che per la determinazione delle tre quantità costanti p, q e r, delle quali le due prime fissano la posizione del centro, e la terza rappresenta il raggio. Segue da ciò che son necessarie tre condizioni per determinare la posizione e la grandezza d'un circolo: questo è pure ciò, che abbiamo veduto negli *Elementi di Geometria*.

Se si volesse determinare il circolo, il quale passa per tre punti, di cui le coordinate sieno

$$\alpha \text{ e } \epsilon,\ \alpha' \text{ e } \epsilon',\ \alpha'' \text{ e } \epsilon'',$$

porrebbonsi α, α', α'' in luogo di x e ϵ, ϵ', ϵ'' in luogo di y; formerebbesi in tal maniera le tre equazioni

$$\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \epsilon^2 - 2q\epsilon + q^2 = r^2,$$
$$\alpha'^2 - 2p\alpha' + p^2 + \epsilon'^2 - 2q\epsilon' + q^2 = r^2,$$
$$\alpha''^2 - 2p\alpha'' + p^2 + \epsilon''^2 - 2q\epsilon'' + q^2 = r^2,$$

le quali non contengono che tre incognite, cioè p, q e r.

Se si toglie successivamente la prima dalla seconda e dalla terza, avremo, scancellando i termini, che si distruggono,

$$2\left[(\alpha-\alpha')p + (\epsilon-\epsilon')q\right] - (\alpha^2-\alpha'^2) - (\epsilon^2-\epsilon'^2) = 0,$$
$$2\left[(\alpha-\alpha'')p + (\epsilon-\epsilon'')q\right] - (\alpha^2-\alpha''^2) - (\epsilon^2-\epsilon''^2) = 0;$$

queste due equazioni non contenendo p, q, se non che al primo grado, fan vedere che il centro del circolo cercato non può aver che una sola posizione; e quanto al raggio, siccome si ha immediatamente

$$r = \sqrt{\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 + \epsilon^2 - 2q\epsilon + q^2}$$

esso non è suscettibile che d'una sola grandezza: non si può dunque far passare per tre punti che un solo circolo.

I resultati della risoluzione dell'equazioni di sopra, essendo inutili a ciò, che dee seguire, io non la terminerò, ma farò osservare ch'essa potrebbe abbreviarsi per l'effetto della simmetria di queste equazioni, la quale condurrebbe facilmente alla costruzione data negli *Elementi di Geometria*.

95. L'equazione generale del circolo

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 = r^2$$

si semplicizza in più maniere, le quali meritano d'essere osservate, perchè le forme, ch'essa prende allora, sono impiegate frequentemente nell'Analisi.

Se vi si faccia $p=0$, $q=0$, si ricade sopra $x^2+y^2=r^2$.

Per porre l'origine delle coordinate sulla circonferenza del circolo, bisogna di fare $p^2+q^2=r^2$, poichè $\sqrt{p^2+q^2}$ esprimendo allora la distanza del centro dell'origine, ne segue che questa distanza è eguale al raggio: l'equazione

del circolo riducesi in questo caso, per motivo di quella che abbiamo già posto, a

$$x^2 - 2px + y^2 - 2py = 0.$$

Finalmente, se per maggiore semplicità si prendesse l'origine all'estremità D' del diametro, il centro trovandosi allora sull'asse dell'ascisse, la sua ordinata diverrebbe nulla, la sua ascissa p sarebbe eguale al raggio r, e l'equazione suddivisata cangerebbesi in

$$x^2 - 2rx + y^2 = 0.$$

Quest'ultima equazione, e la prima $x^2 + y^2 = r^2$ son quelle dell'equazioni del circolo, delle quali si fa un uso il più frequente.

69. Essendo ben inteso ciò, che precede, tutti i problemi, i quali posson proporsi sulla linea retta, e sul circolo, si riducono facilmente all'Algebra, senza che siavi bisogno di ricorrere ad altre proprietà delle figure che alla relazione, ch'esiste fra i tre lati d'un triangolo rettangolo (*). Sia, per primo esempio, questo problema.

Essendo date due linee rette AE *e* DE, *fig.* 41, *dagli angoli, ch'esse fanno con una terza* AB, *e dalla parte* AD, *ch'esse intercettano su questa terza, trovare sopra una linea* AC, *perpendicolare ad* AB, *un punto* G, *pel quale conducendo una retta* GK *parallela ad* AB, *la porzione* HK *compresa tra* AE *e* DF *sia d'una grandezza data.* Fig. 41.

Per formar l'equazioni delle rette AE DE, chiamo a ed a' le tangenti degli angoli EAD, EDA, ch'esse fanno respettivamente con la retta AB; prendo quest'ultima per l'asse dell'ascisse, delle quali pongo l'origine nel punto A, nello stesso modo che quello delle coordinate y, ch'io concepisco paralelle ad AC; e fo AD$=\alpha$. La prima

(*) *Nelle* Note, *che il Sig.* Legendre *ha poste alla fin de' suoi* Elementi di Geometria, *egli deduce questa relazione dalle prime conseguenze della soprapposizion dei triangoli eguali con un mezzo elegantissimo: ma le considerazioni, ch'egli impiega per quest' oggetto, sono disgraziatamente troppo astratte per non poter servire di base ad un libro elementare, e portar nello spirito quella convinzione intima, la quale resulta dalle nozioni ricevute immediatamente da' sensi.*

retta avrà per equazione $y=ax$, poichè essa passa pel punto A; la seconda dovendo passare pel punto D, pel quale si ha

$$y=0\ (85)\ \text{e}\ x=\alpha,$$

sarà

$$y=-a'(x-\alpha),$$

osservando che y diminuisce mentre che x aumenta, e che in conseguenza a' debb' esser presa *negativamente* : avrem dunque le due seguenti equazioni

$$y=ax,\ y=-a'(a-\alpha).$$

Per ottenere i punti H e K, dove le rette, che dette equazioni rappresentano, incontran la linea GK paralella ad AB, serve di farvi $y=\text{AG}$, se dunque si pone $\text{AG}=t$, avremo

$$t=ax,\ t=-a'(x-\alpha);$$

prendendo il valore di x in ciascuna di queste equazioni, conseguiremo

$$x=\frac{t}{a},\quad x=\frac{\alpha a'-t}{a'}.$$

Quest' espressioni son quelle delle ascisse Ah ed Ak, la differenza delle quali somministra hk = HK a motivo delle paralelle; e denotando per m la grandezza, che debb' avere HK, troveremo

$$m=\frac{\alpha a'-t}{a'}-\frac{t}{a},$$

di dove ricaveremo

$$aa'm=\alpha aa'-ta-ta'.$$

e per conseguenza

$$t=\frac{(\alpha-m)aa'}{a+a'}.$$

Tal è il valore di AG, che soddisfa al problema proposto.

97 Suppongo che in vece di dare alla linea HK una grandezza cognita, si dimandi ch' essa sia eguale alla linea AG; ciò che riducesi ad inscrivere un quadrato in un triangolo (66). In questo caso, invece d' eguagliare a m l' espressione di HK, bisognerà eguagliarla a t; il che darà

$$t = \frac{aa' - t}{a'} - \frac{t}{a},$$

di dove ne dedurremo

$$t = \frac{\alpha a a'}{aa' + a + a'}.$$

98. Sia proposto ancora il problema seguente digià risoluto nel n.° 78: *Da un punto* E, fig. 33, *posto come vorremo, condurre una retta in modo che la porzione* D′F′ *di questa retta, intercettata tra due linee, le quali forman tra loro un angolo retto* BAC, *sia d' una grandezza data.* Fig. 33.

Se α e β denotino le coordinate del punto dato E, $y - \beta = -a(x - \alpha)$ sarà l' equazione della retta ED′ condotta per questo punto. Per ottener la lunghezza di D′F′, è duopo determinare AD′ ed AF′, vale a dire il valore di y allorchè $x = 0$, e quello di x allorchè $y = 0$; ipotesi, le quali somministrano l' equazioni.

$$y - \beta = a\alpha, \qquad -\beta = -a(x - \alpha),$$

dalle quali ricavasi

$$y = \beta + a\alpha = \text{AD}', \quad x = \frac{\beta + a\alpha}{a} = \text{AF}';$$

e siccome $\text{F}'\text{D}' = \sqrt{\overline{\text{AD}'}^2 + \overline{\text{AF}'}^2}$, ne resulta

$$\text{F}'\text{D}' = \sqrt{(\beta + a\alpha)^2 + \frac{1}{a^2}(\beta + a\alpha)^2} = \frac{\beta + a\alpha}{a}\sqrt{1 + a^2}.$$

Ponendo $\text{F}'\text{D}' = m$, ed alzando al quadrato, per far disparire il radicale, s' ottiene

$$m^2 = \left(\frac{\beta + a\alpha}{a}\right)^2 (1 + a^2).$$

Quest' equazione essendo sviluppata e ordinata per rapporto alla letterra a, si cangerà in

$$a^4 + \frac{2\beta}{\alpha}a^3 + \frac{\beta^2 + \alpha^2 - m^2}{\alpha^2}a^2 + \frac{2\beta}{\alpha}a + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0,$$

ed ascende, come si vede, al quarto grado; ma, se si faccia $\beta = \alpha$, vale a dire, se si prenda il punto E ad egual distanza dei due assi AC ed AB, essa diviene

$$a^4+2a^3+\frac{2a^2-m^2}{a^2}\,a^2+2a+1=0,$$

e rientra nell'equazione (3) del n.° 78 allorchè cangiasi a in z ed a in a.

99. Fo adesso l'applicazion delle formule, che ho trovate per la linea retta, alla ricerca delle principali proprietà del triangolo. Prendo a quest'effetto due punti M e M',
Fig.42. *fig.* 42, i quali formino coll'origine A un triangolo qualunque: denoto le coordinate del primo punto per. . a, c, quelle del secondo per . . . . a', c': le distanze AM, AM', MM', le quali formano i lati di questo triangolo, saranno, seguendo il n.° 88, espresse respettivamente da

$$\sqrt{a^2+c^2},\qquad \sqrt{a'^2+c'^2},\qquad \sqrt{(a'-a)^2+(c'-c)^2}.$$

Se si fa AM $=c$, AM' $=c'$, MM' $=c''$, avremo queste equazioni

$$c^2=a^2+c^2,$$
$$c'^2=a'^2+c'^2,$$
$$c''^2=a''^2-2a'a+a^2+c'^2-2c'c+c^2,$$

e se si tolga l'ultima dalla somma delle due prime, conseguiremo

$$c^2+c'^2-c''^2=2\,(aa'+cc'),$$

di dove

$$aa'+cc'=\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2}.$$

L'equazioni delle linee AM ed AM' saranno

$$y=\frac{c}{a}\,x,\quad y=\frac{c'}{a'}\,x\ (87);$$

il coseno dell'angolo, ch'esse forman tra loro, avrà per espressione (93)

$$\frac{r\left(1+\frac{cc'}{aa''}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{a'^2}\right)\left(1+\frac{c'^2}{a'^2}\right)}}=\frac{r\,(aa'+cc')}{\sqrt{(a^2+c^2)\;(a'^2+c'^2)}}.$$

Facendo il raggio $r=1$, come quello delle *Tavole dei seni*,

e sostituendo in luogo delle quantità a^2+c^2, $a'^2+c'^2$, $aa'+cc'$ i loro valori c^2, c'^2, $\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2}$, otterremo

$$\cos \mathrm{MAM'} = \frac{c^2+c'^2-c''^2}{2cc'},$$

equazione, la quale dà una relazione fra i tre lati del triangolo MAM', ed un de' suoi angoli. Se si fa attenzione che l'angolo MAM' è opposto al lato $\mathrm{MM'}=c''$, saranno convinti che si debbono avere per gli angoli AMM', AM'M, respettivamente opposti ai lati $\mathrm{AM'}=c'$, $\mathrm{AM}=c$, l'equazioni

$$\cos \mathrm{AMM'} = \frac{c^2+c''^2-c'^2}{2cc''},$$

$$\cos \mathrm{AM'M} = \frac{c'^2+c''^2-c^2}{2c'c''}.$$

Denotando dunque per γ'', γ', γ gli angoli MAM', AMM', AM'M, otterremo le tre equazioni seguenti

$$\left.\begin{array}{l} c^2+c'^2-2cc'\cos\gamma''=c''^2 \\ c^2+c''^2-2cc''\cos\gamma'=c'^2 \\ c'^2+c''^2-2c'c''\cos\gamma=c^2 \end{array}\right\}\ (\mathrm{A}).$$

Se si sommino insieme la prima e la seconda di queste equazioni, poi la prima e la terza, poi la seconda e la terza otterremo tre resultati, i quali diverranno respettivamente divisibili per $2c$, $2c'$, $2c''$ allorchè avrem scancellati i termini comuni ai due membri di ciascheduno, ed i quali daranno pure

$$\left.\begin{array}{l} c-c'\cos\gamma''-c''\cos\gamma'=0 \\ c'-c\cos\gamma''-c''\cos\gamma=0 \\ c''-c\cos\gamma'-c'\cos\gamma=0 \end{array}\right\}\ (\mathrm{B}).$$

È bene osservare che queste equazioni si ottengono immediatamente abbassando successivamente da ciascun angolo del triangolo una perpendicolare sul lato opposto, e calcolando i segmenti di questo lato.

Si ha nella figura 16 Fig. 16.

$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos \mathrm{B}$, $\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\cos \mathrm{C}$,

$\mathrm{BC}=\mathrm{BD}+\mathrm{CD}=\mathrm{AB}\cos \mathrm{B}+\mathrm{AC}\cos \mathrm{C}$.

Facendo BC $= c$, AB $= c'$, AC $= c''$, e conservando le denominazioni degli angoli, conseguiremo

$$c = c' \cos\gamma'' + c'' \cos\gamma', \text{ ovvero } c - c' \cos\gamma'' - c'' \cos\gamma' = 0.$$

Arriverebbesi nella stessa maniera alle due altre equazioni (B).

100. Benchè quest' equazioni sieno in numero di tre; desse non posson frattanto far conoscere i lati allorchè i tre angoli sono dati; poichè, se si cercassero i valori di c, c', c'' col mezzo dell' espressioni generali dell' incognite, determinate dalle tre equazioni di primo grado, troverebbesi o, a causa che il termine cognito manca. Ma queste medesime equazioni si cangiano in

$$\begin{aligned} 1 - p \cos\gamma'' - q \cos\gamma' &= 0 \\ p - \cos\gamma'' - q \cos\gamma &= 0 \\ q - \cos\gamma - p \cos\gamma &= 0 \end{aligned}$$

allorchè si fa $\frac{c'}{c} = p$, $\frac{c''}{c} = q$; esse danno allora il rapporto de' lati del triangolo proposto, e resta di più un' equazione di condizione, la quale si ottiene eliminando p e q. Questa equazione è

$$1 - \cos\gamma''^2 - \cos\gamma'^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\gamma'' \cos\gamma' \cos\gamma = 0,$$

ed il suo primo membro è precisamente il denominatore comune dei valori dell' incognite c, c', c'' dedotti dall' espressioni generali citate qui sopra. Eguagliando questa quantità a *zero*, i valori dei lati c, c', c'' divengono $\frac{0}{0}$, ed i lati restano in conseguenza indeterminati, come lo dimostra la trasformazione operata sull' equazioni (B).

L' equazione di condizione, che abbiamo indicata, contiene la relazione, che debbono avere tra loro i tre angoli γ, γ', γ'' perchè la loro somma sia eguale a due retti, come lo esige la natura del triangolo rettilineo. Per assicurarsene bisogna col mezzo de' valori di sen $(p \pm q)$, cos $(p \pm q)$ (11) sviluppar l' equazione cos $(2^q - \gamma'' - \gamma') = \cos\gamma$; troveremo primieramente

$$-\cos(\gamma'' + \gamma') = \cos\gamma,$$

osservando che sen $2^q = 0$ e cos $2^q = -1$; otterremo in seguito

$$-\cos\gamma''\cos\gamma'+\operatorname{sen}\gamma''\operatorname{sen}\gamma'=\cos\gamma,$$

di dove

$$\cos\gamma+\cos\gamma''\cos\gamma'=\operatorname{sen}\gamma''\operatorname{sen}\gamma',$$
$$(\cos\gamma+\cos\gamma''\cos\gamma')^2=\operatorname{sen}\gamma''^2\operatorname{sen}\gamma'^2=$$
$$(1-\cos\gamma''^2)(1-\cos\gamma'^2);$$

e dopo le riduzioni ricaderemo sull'equazione suddivisata.

È a proposito l'osservare che l'equazioni (A) son, per rapporto ai triangoli rettilinei ciò, che l'equazioni (B) del num.° 47 sono a riguardo dei triangoli sferici, e condurrebbero, per mezzo di semplici trasformazioni, alle formule della risoluzione dei primi triangoli.

101. Per aver l'area del triangolo MAM', *fig.* 42, bisognerà dal punto A abbassare una perpendicolare AD sul lato MM', il quale passando pei punti M e M', le coordinate dei quali sono α e ϵ, α' e ϵ' ha per equazione Fig. 42.

$$y-\epsilon=\frac{\epsilon'-\epsilon}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha),$$

ovvero

$$y=\frac{\epsilon'-\epsilon}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha'\epsilon-\epsilon'\alpha}{\alpha'-\alpha}.$$

Paragonando quest' ultima equazione colla formula $y=ax+b$, troveremo

$$a=\frac{\epsilon'-\epsilon}{\alpha'-\alpha},\quad b=\frac{\alpha'\epsilon-\epsilon'\alpha}{\alpha'-\alpha};$$

ma se s'osserva che nel n.° 92 le lettere α e ϵ denotano le coordinate del punto, dal quale partesi la perpendicolare, coordinate, le quali son nulle nel caso attuale, poichè questo punto è l'origine, l'espressione della perpendicolare riducesi a

$$\frac{-b}{\sqrt{1+a^2}}=-\frac{\alpha'\epsilon-\epsilon'\alpha}{\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\epsilon'-\epsilon)^2}},$$

e ponendo c'' in luogo di $\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\epsilon'-\epsilon)^2}$ otterremo

$$\text{AD}=\frac{\alpha\epsilon'-\alpha'\epsilon}{c''}.$$

Con questo valore avremo per l'area del triangolo MAM'

$$\frac{MM' \times AD}{2} = S = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{2};$$

espressione assai notabile, perchè dessa dà l'area di tutti i triangoli, i quali hanno il loro vertice nel punto A, mediante le coordinate dei vertici degli angoli adiacenti alla lor base.

Si può cangiare la detta espressione in un'altra, la qual non dipenda che dai lati. Per questo bisogna moltiplicare tra loro le due equazioni

$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 = c'^2,$$

e togliere dal prodotto il quadrato di

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2}; \text{ conseguiremo}$$

$$\alpha^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' = c^2c'^2 - \frac{(c^2 + c'^2 - c''^2)^2}{4};$$

prendendo le radici quadrate, e riducendo tutti i termini del secondo membro al medesimo denominatore, troveremo

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2},$$

e l'area del triangolo MAM' avrà per espressione

$$\frac{1}{4}\sqrt{4c^2c'^2 - (c^2 + c'^2 - c''^2)^2},$$

lo sviluppo della quale s'accorda col resultato del n.° 64.

102. Se si concepisca adesso un quarto punto M'', le cui coordinate sieno α'', β'', e si rappresentino per d, d', d'' le distanze AM'', MM'', M'M'', avremo

$$\begin{aligned} \alpha''^2 + \beta''^2 &= d^2 \\ (\alpha'' - \alpha)^2 + (\beta'' - \beta)^2 &= d'^2 \\ (\alpha'' - \alpha')^2 + (\beta'' - \beta')^2 &= d''^2 \end{aligned}$$

Sviluppando queste equazioni, e sostituendo nelle due ultime, in luogo delle quantità $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha'^2 + \beta'^2$, $\alpha''^2 + \beta''^2$, i loro valori c^2, c'^2 e d^2, otterremo

$$\begin{aligned} c^2 + d^2 - 2(\alpha\alpha'' + \beta\beta'') &= d'^2 \\ c'^2 + d^2 - 2(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'') &= d''^2; \end{aligned}$$

se, per abbreviare, si faccia

$$\frac{c^2+d^2-d'^2}{2}=d_{,}, \qquad \frac{c'^2+d^2-d''^2}{2}=d_{,,},$$

avremo

$$d_{,}=aa''+cc'', \qquad d_{,,}=a'a''+c'c''.$$

Prendendo in queste equazioni il valore di a'' e quello di c'', i quali sono

$$a''=\frac{c'd_{,}-cd_{,,}}{ac'-a'c}, \quad c''=\frac{ad_{,,}-a'd_{,}}{ac'-a'c},$$

per porli in $a''^2+c''^2=d^2$ avuto riguardo all'equazioni $a^2+c^2=c^2$, $a'^2+c'^2=c'^2$, troveremo

$$c^2d_{,,}^2+c'^2d_{,}^2-2d_{,}d_{,,}(aa'+cc')=d^2(ac'-a'c)^2\ \text{(C)}.$$

Rimpiazzando in seguito la quantità $aa'+cc'$ e $ac'-a'c$ coi loro valori

$$\frac{c^2+c'^2-c''^2}{2}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{4c^2c'^2-(c^2+c'^2-c''^2)^2}$$

ottenuti qui sopra, e rimettendo

$$\frac{c^2+d^2-d'^2}{2}, \quad \frac{c'^2+d^2-d''^2}{2}$$

per $d_{,}, d_{,,}$, questa equazione altro non conterrà che le sei distanze

AM, AM$'$, MM$'$, AM$''$, MM$''$; M$'$M$''$,

le quali formano i quattro lati e le due diagonali del quadrilatero AMM$'$M$''$. Allorchè i quattro lati di questo quadrilatero, ed una delle sue diagonali saranno cognite, potremo trovare l'altra diagonale.

103. Se si volesse determinare il punto M$''$ mediante le condizioni che le tre distanze AM$''$, M$''$, M$'$M$''$ fossero eguali, questo punto sarebbe allora il centro del circolo circoscritto al triangolo proposto, ed avrebbesi

$$d=d'=d'';$$

ciò, che somministrebbe

$$d_{,}=\frac{c^2}{2}, \quad d_{,,}=\frac{c'^2}{2};$$

l'equazione (C) diverrebbe,

$$c^2c'^4+c'^2c^4-2c^2c'^2(\alpha\alpha'+\beta\beta')=4\,d^2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2,$$

e si ridurrebbe a

$$c^2c'^2c''^2=16d^2S^2,$$

ponendo per $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ il suo valore, ed osservando che, se si denoti per S la superficie del triangolo AMM' eguale a

$$\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{2}(101);\ \text{avremo}$$

$$(\alpha\beta'-\alpha'\beta)=4S^2.$$

Ricavasi da ciò

$$d=\frac{cc'c''}{4S};$$

espression semplicissima del raggio del circolo circoscritto al triangolo proposto; e scrivendo $\frac{c^2}{2}$ e $\frac{c'^2}{2}$ in luogo di $d_{,,}$ e $d_{,,}$ nei valori di α'' e di β'', si hanno le coordinate del centro di questo circolo.

104. Non sarà nulla più difficile di trovare le coordinate del centro del circolo iscritto ed il raggio di questo
Fig. 43. circolo. In questo caso il punto M', *fig.* 43, si trova al di dentro del triangolo, ed in una situazion tale che le perpendicolari abbassate da questo punto su ciascuno de' lati AM, AM', MM' son eguali tra loro. Per esprimere analiticamente questa circostanza, è duopo formar l'equazioni delle tre linee suddivisate, e di dedurne, mediante la formula del n.° 88, le lunghezze delle perpendicolari condotte dal punto M'', di cui le coordinate sono α'' e β''. Ora queste equazioni son respettivamente,

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x,\qquad y=\frac{\beta'}{\alpha'}(87),$$

$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}(88);$$

le perpendicolari abbassate su ciascuna di esse avranno per espressione

$$\frac{\alpha\beta''-\alpha''\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \frac{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}},$$

$$\frac{(a'-a)c''-(c'-c)a''+ac'-a'c}{\sqrt{(a'-a)^2+(c'-c)^2}},$$

e potranno scriversi nel modo seguente

$$\frac{ac''-a''c}{c}, \quad \frac{a'c''-a''c'}{c'},$$

$$\frac{-(ac''-a''c)-(a''c'-a'c'')+(ac'-a'c)}{c''},$$

ponendo pei radicali i loro valori c, c', c''.

Se ci rammentiamo adesso che la formula, che dà la perpendicolare abbassata da un punto sopra una linea, è stata ottenuta mediante un'estrazion di radice quadrata, e ch'essa è in conseguenza suscettibile d'esser presa positivamente o negativamente, ne concluderemo che ciascuna dell'espressioni suddivisate ha due valori. Per non impiegare che quelli, i quali son positivi fa di mestieri osservare che, dietro alla figura, la linea AM' allontanandosi di più dall'asse dell'ascisse AB che la linea AM, ed il punto M'' essendo compreso tra la prima e la seconda deesi avere

$$\frac{c'}{a'} > \frac{c''}{a''}, \quad \frac{c'}{a'} > \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \frac{c''}{a''} > \frac{c}{a},$$

ovvero, ciò ch'è la stessa cosa,

$$a''c' > a'c'', \qquad ac' > a'c, \qquad ac'' > a''c;$$

dal che ne segue che, per dare un valor positivo, l'espressione della seconda perpendicolare debb' essere presa con segni contrari a quelli, ch'essa ha qui sopra.

Dippiù il punto M'' trovandosi al disotto della retta MM', di cui l'equazione è

$$y = \frac{c'-c}{a'-a}x + \frac{a'c-ac'}{a'-a},$$

fa di mestieri che

$$c'' < \frac{c'-c}{a'-a}a'' + \frac{a'c-ac'}{a'-a},$$

ovvero che

$$c'' < \frac{c-c'}{a-a'}a'' + \frac{ac'-a'c}{a-a'};$$

il che somministra

$$\alpha c'' - \alpha' c'' < \alpha'' c - \alpha'' c' + \alpha c' - \alpha' c,$$

ovvero

$$\alpha c'' - \alpha c + \alpha'' c' - \alpha' c'' < \alpha c' - \alpha' c;$$

condizione, dietro la quale l'espressione della terza perpendicolare è positiva.

Se, dietro a queste considerazioni, si faccia

$$\frac{\alpha c'' - \alpha'' c}{c} = e \quad \frac{\alpha'' c' - \alpha' c''}{c'} = e',$$

$$\frac{-(\alpha c'' - \alpha'' c) - (\alpha'' c' - \alpha' c'') + (\alpha c' - \alpha' c)}{c''} = e'',$$

e si sommino i prodotti $ec, e'c', e''c''$, conseguiremo, mediante le riduzioni,

$$ec + e'c' + e''c'' = \alpha c' - \alpha' c.$$

Questa equazione è facile a verificarsi; poichè i prodotti ec, $e'c'$, $e''c''$ esprimon le aree de' triangoli AM''M, AM''M', MM''M' moltiplicate per 2; la somma di quest'aree è eguale a quella del triangolo totalo AMM', la quale abbiam denotata per S, e si ha

$$\alpha c' - \alpha' c = 2S \ (101).$$

Allorchè $e = e' = e''$ s'ottiene immediatamente

$$e = \frac{2S}{c + c' + c''};$$

e quando $c = c' = c''$ s'ottiene

$$e + e' + e'' = \frac{2S}{c}.$$

La prima di quest'espressioni è quella del raggio del circolo iscritto, e la seconda fa vedere che *se da un punto qualunque preso nell' interno d' un triangolo equilatero si abbassi una perpendicolare su ciascun de' lati di questo triangolo, la somma di queste tre linee sarà eguale alla sua altezza;* poichè, prendendo il lato c per base, e chiamando h l'altezza, si ha $S = \frac{1}{2} ch$, il che dà $e + e' + e'' = h$.

Potrebbesi pur ricavare un gran numero di conseguenze

dalla teorica, che ho esposta, ma ciò, che precede, serve per questa opera, ed osserverò che esistono pei poligoni rettilinei qualunque dell' equazioni analoghe all' equazioni (A) e (B) del n.° 99, le quali si ottengono nella stessa maniera, e condurrebbero alle proprietà di questi poligoni, come quelle conducono alle proprietà del triangolo. Il Sig. *Lagrange* ha dato sulle piramidi una *Memoria*, alla quale ciò, che si è detto, può servir di preliminare, e che si estenderebbe ai poliedri facendo uso delle formule riportate nel quinto capitolo del primo volume del mio *Trattato del Calcolo differenziale e del Calcolo integrale* (*).

105. La combinazione dell' equazione della circonferenza del circolo con quella della linea retta, conduce alle diverse proprietà, le quali resultano dall'incontro di queste linee, e dà la soluzione di tutti i problemi nei quali l'incognita non passa il secondo grado.

Sieno $x^2 + y^2 = r^2$, $y - c = a(x - \alpha)$ queste due equazioni: impiegarle alla determinazione di x e di y, ovvero considerarle come contenenti le medesime incognite, vuol dir supporre che i punti, ai quali appartengono le coordinate x, y, son situati nel tempo medesimo sulla circonferenza del circolo e sulla linea retta proposta, vale a dire, sono le intersezioni di queste linee; ed in generale egli è manifesto che, per trovare i punti d'incontro di due linee qualunque, bisogna supporre che le loro equazioni non contengano che le medesime incognite.

Eliminando in primo luogo y col mezzo del suo valore preso nella seconda equazione, troveremo

$$x^2 + (ax + c - a\alpha)^2 = r^2.$$

Questa equazione del secondo grado essendo sviluppata, darà due valori di x, perchè infatti la linea retta dee incontrare in generale il circolo in due punti; ma si può arrivare a resultati più semplici prendendo per incognita la distanza del punto, di cui le coordinate sono α e c, da uno de' punti d'intersezione della retta e del circolo: se si denoti questa distanza per z, avremo (88)

(*) *Vedete pure la* Poligonometria *dell'* Huilier, *la sua* Poliedrometria *inserita nel primo volume delle* Memorie presentate all' Istituto dai Dotti stranieri, *la* Geometria di posizione di Carnot, *e la sua* Memoria sulla relazione, ch'esiste tra le distanze di cinque punti presi nello spazio.

$$z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\epsilon)^2},$$

di dove ricaveremo

$$z^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\epsilon)^2;$$

e ponendo per $y-\epsilon$ il suo valore $a\,(x-\alpha)$, conseguiremo

$$z^2 = (x-\alpha)^2(1+a^2),$$

donde ne dedurremo

$$x-\alpha = \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y-\epsilon = \frac{az}{\sqrt{1+a^2}};$$

il che darà

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y = \epsilon + \frac{az}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Sostituendo questi ultimi valori nell'equazione $x^2+y^2=r^2$, la cangeremo in quest' altra

$$\alpha^2 + \frac{2\alpha z}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{z^2}{1+a^2} + \epsilon^2 + \frac{2\epsilon a z}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{a^2 z^2}{1+a^2} = r^2,$$

la quale riducesi a

$$z^2 + \frac{2(\alpha+\epsilon a)}{\sqrt{1+a^2}}\,z + \alpha^2 + \epsilon^2 - r^2 = 0,$$

e che farà in primo luogo conoscere z, ed in seguito x e y col mezzo dell'espressioni precedenti.

Fig. 44. Egli è manifesto che, se il punto E, *fig. 44*, è quello, di cui le coordinate sono α e ϵ, che MNM′ ed EM sieno il circolo e la retta proposta, a esprimerà la tangente dell'angolo EeB, ed i due valori di z apparterranno alle rette EM ed EM′.

106. Si sa per la teorica dell' equazioni che l' ultimo termine è il prodotto di tutte le radici; se dunque si chiamino z' e z'' quelle dell' equazione suddivisata, avremo

$$z'z'' = \alpha^2 + \epsilon^2 - r^2,$$

espressione, la quale non dipendendo dalla quantità a, resterà la medesima qualunque sia questa quantità, vale a dire, qualunque sia l'angolo EeB, di cui essa è la tangente; e siccome z' e z'' rappresentano le due linee EM ed EM′, segue da ciò che il prodotto EM × EM′ è il medesimo per

tutte le linee condotte pel punto E, ovvero che, se si tiri una seconda secante Em', avremo

$$EM \times EM' = Em \times Em',$$

di dove resulta che le secanti EM' ed Em' sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne EM ed Em, così come dimostrasi negli *Elementi*.

Allorchè il punto E è al di fuori del circolo si ha

$$\alpha^2 + \beta > r^2,$$

poichè $\alpha^2 + \beta^2$ esprime il quadrato della distanza del punto E dal centro A; ma quando questo punto è interno nel circolo, come lo dimostra la figura 45, z' e z'' son di segni differenti, perchè l'ultimo termine $\alpha^2 + \beta^2 - r^2$ divien negativo a motivo di $\alpha^2 + \beta^2 < r^2$. D'altronde il prodotto $EM \times EM'$ resta indipendente dall' inclinazione della linea MM' per rapporto ad AB; e conducendo pel punto E una seconda corda mm', si ha ancora Fig. 45.

$$EM \times EM' = Em \times Em',$$

di dove resulta, come si dimostra negli *Elementi*, che le corde d' un medesimo circolo si tagliano in ragione reciproca; e si vede che questo teorema ed il precedente non ne fanno, a parlar propriamente, che un solo, poichè dessi deduconsi dalla stessa equazione.

Ricavando dall' equazione

$$z^2 + \frac{2(\alpha + \beta a)}{\sqrt{1 + a^2}} z + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

i valori di z, si trovano

$$z' = \frac{-(\alpha + \beta a) + \sqrt{r^2(1 + a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1 + a^2}},$$

$$z'' = \frac{-(\alpha + \beta a) - \sqrt{r^2(1 + a^2) - (\beta - a\alpha)^2}}{\sqrt{1 + a^2}}:$$

tali son l' espressioni delle linee EM ed EM'.

Desse posson essere semplicizzate cangiando le coordinate in modo che le ascisse x ed α sien prese sulla retta AE, *fig.* 44, la quale unisce il punto E col centro A del circolo proposto, partendo sempre da questo punto, e le ordinate essendo perpendicolari a questa retta: avremo allora Fig. 44.

$$\zeta = 0, \qquad \alpha = AE,$$

$$z' = \frac{-\alpha + \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$z'' = \frac{-\alpha - \sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

l'equazione al circolo non cangerà punto, ma quella della retta EM diverrà

$$y = a(x - \alpha).$$

107. Supponendo che il punto E sia esterno riguardo al circolo, si ottiene

$$MM' = EM' - EM = \frac{2\sqrt{r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

ma egli è manifesto che questa linea diminusce a misura che la linea EM, girando intorno del punto E, tende ad uscir dal circolo, ed i punti M e M' finiscono con coincidere in N allorchè questa linea non ha più col circolo che un semplice contatto: a questo punto si ha dunque $MM' = 0$, ed in conseguenza

$$r^2(1+a^2) - a^2\alpha^2 = 0$$

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}.$$

Ecco l'espressione della tangente trigonometrica dell'angolo, che dee fare con una linea AE una linea EN condotta pel punto E in modo da toccare il circolo, ed in conseguenza la soluzione algebrica di questo problema: *Condurre da un punto preso fuori d'un circolo una tangente a questo circolo.*

108. Le medesime considerazioni serviranno pure a determinar la tangente condotta da un punto preso sulla circonferenza del circolo; e per maggior generalità porrò questo punto in una maniera qualunque. Denotando sempre per α e ζ le sue coordinate, avremo per l'equazione del circolo, alla quale queste quantità debbono soddisfare,

$$\alpha^2 + \zeta^2 = r^2,$$

il che ridurrà l' equazione

$$z^2+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

$$z^2+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}z=0;$$

ed in questo stato essa si decompone in

$$z=0,\qquad z+\frac{2(\alpha+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}=0;$$

le sue radici saranno dunque

$$z'=0,\qquad z''=-\frac{2(a+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}};$$

e la differenza di questi valori, ovvero la lunghezza della porzione della secante compresa nel circolo, sarà

$$\frac{2(a+\beta a)}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Affinchè questa quantità svanisca bisognerà che s'abbia

$$\alpha+\beta a=0,\qquad \text{ovvero}\qquad a=-\frac{\alpha}{\beta};$$

resultato, il quale s'accorda con ciò, che dimostrasi negli *Elementi*; poichè la retta condotta pel centro del circolo e pel punto, le cui coordinate sono α e β, ovvero il raggio AN, avrebbe per equazione $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ (87); l'equazione $y-\beta=a(x-\alpha)$ divenendo, pel valore di a trovato di sopra, $y-\beta=-\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$, rappresenterà la retta perpendicolare a questo raggio, e che passa pel punto, di cui le coordinate sono α e β, vale a dire per la sua estremità N (90).

Se si volesse conoscere la distanza dell' origine A delle coordinate dal punto ove la tangente NT incontra l' asse delle ascisse, bisognerebbe, nell' equazione di questa tangente, far $y=0$; il che darebbe

$$-c=-\frac{a}{c}(x-a)\text{, e }x=\frac{a^2+c^2}{a}=\frac{r^2}{a}\text{,}$$

a motivo di $a^2+c^2=r^2$.

109. Si può mediante quel, che precede, risolvere il problema seguente. *Trovare la posizione, che dee aver la linea* EM *condotta pel punto dato* E, *perchè la parte* MM' *di questa linea compresa nel circolo sia d'una grandezza data* m. Affin d'arrivare ad espressioni più semplici, prenderei, come alla fine del n.° 106, la linea AE per asse delle ascisse, ed eguagliando a m la differenza de' valori di z, ottenuti nel n.° 107, avrei

$$m=\frac{2\sqrt{r^2(1+a^2)-a^2\alpha^2}}{\sqrt{1+a^2}};$$

facendo sparire i radicali, conseguirei

$$m^2(1+a^2)=4r^2(1+a^2)-4a^2\alpha^2;$$

di dove ricaverei

$$a=\frac{\sqrt{4r^2-m^2}}{\sqrt{4\alpha^2-4r^2+m^2}};$$

sostituendo questo valore in $y=a(x-\alpha)$, otterrei l'equazione della retta cercata.

Sin qui non è che la soluzione analitica del problema, il quale mi occupa; fa di mestieri adesso costruir l'espressione suddivisata. Affine di pervenirvi, osserveremo in primo luogo che il numeratore $\sqrt{4r^2-m^2}$ esprime il lato d'un triangolo, di cui $2r$ è l'ipotenusa, e m il terzo lato. Daremo in seguito al denominatore $\sqrt{4\alpha^2-4r^2+m^2}$ la forma $\sqrt{4\alpha^2-(4r^2-m^2)}$, equivalente a $\sqrt{4\alpha^2-(\sqrt{4r^2-m^2})^2}$, e che fa vedere che questo denominatore è pure il lato d'un triangolo rettangolo avente per ipotenusa 2α, e per terzo lato il radicale $\sqrt{4r^2-m^2}$, ovvero il numeratore, del quale ho indicata la costruzione.

Denotando per q e per p le due linee, le quali otterremo con queste operazioni, io ho

$$a=\frac{q}{p};$$

l'equazione $y = a(x-\alpha)$ diviene

$$y = \frac{q}{p}(x-\alpha),$$

e ne resulta che, se si prenda sopra AE, a partire dal punto E, una distanza $EF = p$, e per l'altra estremità di questa distanza s'innalzi una perpendicolare $FG = q$, la retta, che unirà l'estremità di questa perpendicolare col punto E, godrà della proprietà compresa nell'enunciato del problema; poichè l'angolo FEG avrà per tangente trigonometrica $a = \frac{q}{p} = \frac{FG}{EF}$.

110. Debb'essere manifesto, dietro a ciò che precede, che i problemi di Geometria possono esser trattati con due metodi ben distinti: l'uno consiste nel determinare l'equazioni delle linee, le quali contengono i punti cercati, partendo dalle proprietà di queste linee; e l'altro nel dedurre immediatamente dalle considerazioni de' triangoli simili, e de' triangoli rettangoli, che presenta la figura resultante dal problema, supposto risoluto, col sussidio ancora di qualche costruzione preparatoria, le relazioni delle rette, le quali determinano la posizione di questi punti.

Il primo di questi metodi, alcune volte più elegante del secondo, è sempre più generale; ma il secondo è spesso più semplice; e ciò debb'essere, poichè, mediante questo, si prendon le cose di meno alto, e si parte dalle proprietà più vicine a quelle, che ricercasi di scuoprire(*).

111. L'equazione del primo grado non ha dato che una sola specie di linee, vale a dire la linea retta; l'equazione del circolo s'è trovata di secondo grado: ma quest'equazione, ottenuta nel n.° 94 sotto la forma la più ge-

---

(*) *Io ho tracciato l' andamento fecondo e uniforme del primo di questi metodi nella Prefazione del mio* Trattato del Calcolo differenziale e del Calcolo integrale; *e i lettori, i quali vorranno conoscerne più particolarmente l' applicazione, troveranno di che soddisfare al lor gusto nella seconda Edizione della* Raccolta di diverse Proposizioni di Geometria ec. *pubblicata dal Sig.* Puissant, *Dotto commendabilissimo, addetto adesso al Corpo degl' Ingegneri-Geografi.*

nerale, non è ancora che un caso particolare di questo medesimo grado, la di cui formula è

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F \ldots\ldots (1):$$

resta dunque a discuoprire le curve, le quali corrispondono agli altri casi di questa formula. Osserverò in primo luogo che si può, senza diminuirne la generalità, scriverla così:

$$y^2 + \frac{B}{A} xy + \frac{C}{A} x^2 + \frac{D}{A} y + \frac{E}{A} x = \frac{F}{A};$$

e facendo, per abbreviare,

$$\frac{B}{A} = b \; \frac{C}{A} = c, \; \frac{D}{A} = d, \; \frac{E}{A} = e, \; \frac{F}{A} = f,$$

ne resulterà

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f.$$

Il mezzo, che si offre il primo per determinare le circostanze del corso delle curve cercate, è quello di esaminar l'andamento de' valori dell'ordinate per rapporto a quelli, che si possono assegnare alle ascisse, e per questo di risolvere l'equazione suddivisata per rapporto a y. Operando di tal maniera si trova

$$y = -\frac{1}{2}(bx + d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(f - ex - cx^2) + (bx + d)^2}.$$

Sviluppando la quantità, la quale è sotto il radicale, ed ordinandola per rapporto a x, conseguiremo

$$y = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(4f + d^2) - 2(2e - bd)x - (4c - b^2)x^2}}{2}$$

Facendo, per abbreviare,

$$4f + d^2 = p, \qquad 2e - bd = n, \qquad 4c - b^2 = m,$$

avremo

$$y = -\frac{bx + d}{2} \pm \frac{\sqrt{p - 2nx - mx^2}}{2}.$$

Si vede immediatamente che il valore di y è composto di due parti di cui una, espressa da $-\frac{bx + d}{2}$, è l'or-

dinata d'una linea retta avente per equazione $y=-\frac{1}{2}bx-\frac{1}{2}d$, la quale si costruisce prendendo sull' asse AC' al disotto di AC, *fig.* 46, una parte di $AD=\frac{1}{2}d$, e conducendo pel punto D una retta DE facilmente dal lato delle x negative un angolo DEA, la cui tangente sia eguale a $\frac{1}{2}b$ (87); di manierachè AP essendo x, PN sarà $-\frac{bx+d}{2}$. Egli è manifesto adesso che, per avere i punti, i quali appartengono alla curva cercata, bisogna portare nella direzion di PN, tanto al disopra quanto al disotto della retta DE, delle parti NN e NM' eguali a Fig. 46.

$$\frac{1}{2}\sqrt{p-2nx-mx^2},$$

poichè avremo con questo mezzo

$$PM=-\frac{1}{2}(bx+d)+\frac{1}{2}\sqrt{p+2nx-mx^2},$$

$$PM'=-\frac{1}{2}(bx+d)-\frac{1}{2}\sqrt{p-nx-mx^2}.$$

La retta DE gode pure della proprietà riguardevole di dividere in due parti eguali le linee condotte paralellamente ad AC tra due punti della curva cercata, ed è per questa ragione che le è stato dato il nome di *diametro*; ma vi è questa differenza tra la linea DE, e i diametri del circolo, che questi ultimi incontrano ad angolo retto tutte le linee, ch' essi dividono in due parti eguali, laddovechè il primo lo fa obliquamente: frattando vedremo ben presto che queste due circostanze derivano da una medesima legge.

112. L'equazione qui sopra si semplicizzerebbe molto prendendo per ordinate le rette NM e NM', vale a dire facendo

$$y+\frac{bx+d}{2}=t;$$

verrebbe allora

$$t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{p - 2nx - mx^2},$$

ma le ascisse AP non sarebbero più contate sulla linea, dalla quale partono le ordinate. Per ridurle a questo stato, fa di mestieri prenderle sul diametro DE: questo è ciò, che s'affretterà ponendo $DN = s$, ed osservando che, se si tiri DG paralella ad AB, avremo

$$DG = DN \cos D = s \cos D.$$

L'angolo D è lo stesso che l'angolo E, di cui la tangente è $\frac{1}{2}b$; il suo coseno è

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}b^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 + b^2}} \text{ (p. 30)};$$

e poichè $AP = DG$; ne resulterà

$$x = \frac{2s}{\sqrt{4 + b^2}}, \text{ ovvero } x = qs,$$

facendo, per abbreviare,

$$\frac{2}{\sqrt{4 + b^2}} = q.$$

Il valore di x essendo posto in quello di t, si trova

$$t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{p - 2nqs - mq^2s^2},$$

la quale equazione debb'esistere tra s e t, ovvero tra le rette DN e NM per ciascun punto della curva, ed in conseguenza la sua equazione riportata alle coordinate DN e NM. Quest'ultima, benchè più semplice di

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f,$$

è pur generale, poichè le trasformazioni effettuate fin qui non hanno introdotta alcuna condizion particolare.

L'espressione di t essendo affetta in generale da un radicale di secondo grado, non potrebbe avere valore reale se non fino a che la quantità $p - 2qns - mq^2s^2$ sarà positiva. L'esame di questa circostanza presenta più casi, i quali io discuterò successivamente.

113. Suppongo in primo luogo che la quantità denotata per m nel n.° 111 sia positiva, e pongo l'espressione $p - 2nqs - mq^2s^2$ sotto la forma

$$mq^2\left(\frac{p}{mq^2} - \frac{2n}{mq}s - s^2\right),$$

per non aver da considerare che la seguente

$$\frac{p}{mq^2} - \frac{2n}{mq}s - s^2,$$

dalla quale si può fare sparire il termine ove s non è che al primo grado, prendendo

$$s = u - \frac{n}{mq}, \text{ (\textit{Elem. d' Alg.} 209)};$$

e dopo la sostituzione e la riduzione essa diventa

$$\frac{pm + n^2}{m^2q^2} - u^2.$$

Affin di sapere cosa sia u, è necessario costruire il suo valore in s, e l'espressione

$$u = s + \frac{n}{mq} = \text{DN} + \frac{n}{mq}$$

dimostra che l'origine dell'u debb' essere posta indietro rispetto a quella delle s ad una distanza $\text{OD} = \frac{n}{mq}$, perchè allora

$$\text{DN} = \text{ON} - \text{OD} = u - \frac{n}{mq}.$$

Ciò fatto, si ha

$$t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{mq^2\left\{\frac{pm+n^2}{m^2q^2} - u^2\right\}},$$

e si vede che l'espressione di t sarà eguale fintantochè

$$u^2 < \frac{pm + n^2}{m^2q^2};$$

ch'essa poi sarà nulla quando

$$u^2 = \frac{pm + n^2}{m^2q^2}, \text{ ovvero } u = \pm\sqrt{\frac{pm + n^2}{m^2q^2}}.$$

Questi ultimi valori indican dunque le intersezioni della curva col diametro DE; e portandoli da ciascun lato del punto O, a motivo de' loro segni, otterremo i punti I ed I′ posti ad egual distanza dal primo.

Al dilà di questi punti la quantità

$$\frac{pm+n^2}{m^2q^2}-u^2$$

divenendo negativa, le ordinate t saranno immaginarie, e la curva non avrà alcun punto corrispondente alle ascisse maggiori di OI ed OI′; dessa sarà dunque contenuta nello spazio compreso tra le linee IH, I′H′ condotte pei punti I ed I′ paralellamente alle ordinate.

114. I due valori di t in u non differendo che pel loro segno, e restando gli stessi, sia che si prenda u positivo o negativo, ne segue che all' ascissa ON = ON′ corrisponde l'ordinata N′M″ eguale a NM′, e posta in senso contrario, di manierachè i triangoli M″N′O e M′NO son eguali, ed in conseguenza la retta M′M″ è divisa in due parti eguali nel punto O. Questa proprietà, di cui gode il punto O per rapporto a tutti i punti della curva, gli ha fatto dare il nome di *centro*, per analogia col centro del circolo; ma per le altre curve i raggi non sono eguali che due a due, perchè i diametri sono ineguali.

115. La forma della curva, che rappresenta l' equazione tra t ed u, riconoscesi facilmente dalla costruzion di questa equazione; per effettuarla, faccio immediatamente

$$\frac{pm+n^2}{m^2q^2}=a'^2\,;$$

proviene

$$t=\pm\frac{1}{2}\sqrt{mq^2(a'^2-u^2)}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}.\ \sqrt{a'^2-u^2}.$$

Prendendo allora a' pel raggio d' un circolo avente il suo centro nel punto O, u per ascissa, il fattore $\sqrt{a'^2-u^2}$ esprimerà l'ordinata di questo circolo alzata perpendicolarmente ad OI. A riguardo del fattore $\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}$, desso non dee rappresentar che un rapporto, si voglia aver riguardo all' omogeneità dell' espressioni (71); io lo denoterò dunque

per $\frac{b'}{a'}$, ed avrò in conseguenza $\frac{b'^2}{a'^2}=\frac{1}{4}mq^2, b'^2=\frac{mp+n^2}{4m}$,
di dove ricaverò

$$t=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2-u^2}.$$

Si vede ancora che l' ordinata NM s' otterrà cercando il quarto termine della proporzione

$$a':b'::\sqrt{a'^2-u^2}:t.$$

Allorchè avremo determinata la grandezza t, la porteremo lungo la linea MM', tanto al disopra quanto al disotto di DE, a motivo del segno $\pm$.

È manifesto che la curva resultante da questa costruzione sarà rientrante in sè stessa, come il circolo, e non si estenderà che nello spazio compreso da $u=a'$ fino a $u=-a'$; poichè al di là di questi limiti il radicale, ovvero l' ordinata del circolo sarà immaginaria.

Il maggior valore, che possa avere l'ordinata t, è manifestamente quello, che corrisponde al punto O, pel quale $u=o$; si ha in questo caso

$$t=\pm b';$$

prendendo dunque le rette OL ed OL' eguali a b', i punti L e L' saranno i limiti della curva nel senso delle sue ordinate, come i punti I ed I' lo sono in quel delle ascisse.

116. Egli è importante osservare che, se la quantità rappresentata da a'^2 fosse negativa, il radicale $\sqrt{a'^2-u^2}$ resterebbe sempre immaginario, e l'equazione proposta non potrebbe esprimere allora alcuna linea. Risalendo al valore di a'^2, il qual è $\frac{pm+n^2}{m^2q^2}$, vedremo ch' esso sarebbe negativo se p fosse affetto dal segno—, e si fosse avuto nel medesimo tempo $pm>n^2$.

Quando in questo caso $pm=n^2$ s' ottiene (115) $a'=o$, $b'=o$; ma si ha sempre $\frac{b'}{a'}=\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}$, ed in conseguenza

$$t=\pm\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}.\sqrt{-u^2}=\pm\frac{1}{2}\,qu\sqrt{-m};$$

equazione, alla quale si soddisfa ponendo $t=0$, $u=0$; si può dunque dire che la curva riducesi allora al solo punto O ove $t=0$, $u=0$, e che questo punto è il limite, verso del quale tendono, a misura che i diametri II' e LL' diminuiscono, le curve date dall' equazione suddivisata.

Inalzando al quadrato i due membri dell' equazione

$$t=\pm\frac{1}{2}\sqrt{mq^2\left(\frac{pm+n^2}{m^2q^2}-u^2\right)},$$

essa si cangia in

$$t^2=\frac{1}{4}mq^2\left(\frac{pm+n^2}{m^2q^2}-u^2\right),$$

ed in

$$4mt^2+m^2q^2u^2-pm-n^2=0.$$

Allorchè p è negativo dessa si cangia in

$$4mt+m^2q^2u^2+pm-n^2=0;$$

e quando $pm>n^2$, il suo primo membro essendo la somma di tre quantità essenzialmente positive, poichè si suppone che, m è pur positiva, essa non può divenir nulla che nel caso ove si avessero separatamente le tre equazioni

$$4mt^2=0,\ m^2q^2u^2=0,\ pm-n^2=0.$$

Si può soddisfare alle due prime facendo $t=0$, $u=0$; ma l'ultima esprime una condizione, senza la quale la proposta è affatto assurda.

117. Suppongo adesso che m sia negativa; la quantità $p-2nqs-mq^2s^2$ diverrà

$$p-2nqs+mq^2s^2=mq^2\left\{\frac{p}{mq^2}\ \frac{2n}{mq}s+s^2\right\};$$

faremo sparire il termine $-\frac{2n}{mq}s$ prendendo $s=u+\frac{n}{mq}$,

Fig. 47. e la quantità $\frac{n}{mq}$, la quale rappresenta DO, *fig.* 47, avendo qui il segno $+$, si porterà sulla parte DF affetta alle ascisse positive. Avendo in tal maniera il centro O, e l'equazione proposta diverrà

$$t=\pm\frac{1}{2}\sqrt{mq^2\left(\frac{pm-n^2}{m^2q^2}+u^2\right)};$$

ponendo $\frac{pm-n^2}{m^2q^2}=\pm a'^2$, secondo che la quantità $pm-n^2$ sarà positiva o negativa, e facendo sempre $\frac{1}{4}\ mq^2=\frac{b'^2}{a'^2}$ otterremo

$$t=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{u^2\pm a'^2}.$$

Questa equazione sembra contenere due casi distinti, dessa non ne contiene nulladimeno che un solo; poichè, se s'inalzino i suoi due membri al quadrato, ne dedurremo

$$t^2=\frac{b'^2}{a'^2}(u^2\pm a'^2),$$

di dove

$$a'^2\,t^2-b'^2u^2=a'^2\,b'^2,$$

$$b'^2\,u^2-a'^2\,t^2=b'^2\,a'^2;$$

equazioni, le quali non differiscon l'una dall'altra se non perchè nella seconda a' e t tengono il posto, che occupano b' e u nella prima, e reciprocamente: bisogna dunque d'esaminare ciò che significhi una di esse.

Considererò in particolar la seconda: se ne ricava

$$t=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{u^2-a'^2};$$

l'ordinata t si costruisce cercando una quarta proporzionale alle tre linee

$$a',\ b',\ \text{e}\ \sqrt{u^2-a'^2},$$

di cui l'ultima è una media proporzionale tra $u-a'$, ed $u+a'$, e non si trova reale che fintantochè $u>a'$. La curva cercata non ha dunque da $u=0$ fino a $u=+a'$, e da $u=0$ fino ad $u=-a'$ alcuna ordinata reale; e siccome $u=a'$ ed $u=-a'$ danno egualmente $t=0$, ne resulta che questa curva incontra il diametro DE nei punti I ed I' ove si terminano le ascisse OI ed OI', eguali ad a', ma ch'essa non s'estende punto tra le rette IH ed I'H'.

Al di là de' punti I ed I' si ha $u>a'$, tanto positi-

vamente quando negativamente, l'ordinata t aumenta quanto mai, e nulla limita la grandezza, alla quale essa può giugnere. Dietro a queste considerazioni egli è manifesto che il corso della curva è simile a quello delle linee KIk, K'I'k', separate dall' intervallo II', e i di cui rami IK ed Ik, I'K' ed I'k' s' estendono all'infinito.

Se si considerasse questa curva per rapporto alla retta LL', vale a dire prendendo t per l' ascissa ed u per l' ordinata, la sua equazione somministrerebbe

$$u = \pm \frac{a'}{b'} \sqrt{t^2 + b'^2}.$$

In questa forma u non potrebbe divenir minore di OI ed OI', e la curva non incontra mai il suo diametro LL'. Si fa manifesto da ciò che l' equazione

$$a'^2t^2 - b'^2u^2 = a'^2b'^2$$

conducendo pure a

$$t = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{u^2 + a'^2},$$

dee appartenere ad una curva QLq, Q'L'q' della medesima specie che DIk, K'I'k, ma rivolta per rapporto al diametro LL' delle t, come quest'ultima lo è per rapporto al diametro II' delle u.

118. Se si avesse $a' = 0$, ovvero $pm - n^2 = 0$ (117), l' espressione di t ridurrebbesi a $t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{mq^2u^2}$, e darebbe le due equazioni distinte

$$t = \frac{1}{2} qu \sqrt{m}, \quad t = -\frac{1}{2} qn \sqrt{m},$$

le quali non rappresentano che due linee rette condotte pel punto O. Affine di costruirle prenderemo a piacere un' ascissa OR; conseguiremo

$$t = \pm \frac{1}{2} \text{OR}.q\sqrt{m};$$

e portando questi valori da R in S ed in S', ricaveremo OS ed OS', le quali saranno le rette richieste.

Vado a paragonare a queste rette la curva KIk prendendo per un' ascissa qualunque ON $= u$ la differenza MV

delle ordinate corrispondenti NM, e NV. La prima essendo espressa da

$$\frac{1}{2}\sqrt{mq^2}.\sqrt{u^2-a'^2}, \text{ ovvero } \frac{1}{2}qu\sqrt{m}.\sqrt{1-\frac{a'^2}{u'^2}},$$

e la seconda dà

$$\frac{1}{2}qu\sqrt{m},$$

otterrei

$$MV=\frac{1}{2}qu\sqrt{m}-\frac{1}{2}qu\sqrt{m}\sqrt{1-\frac{a'^2}{u^2}}$$

$$=\frac{1}{2}qu\sqrt{m}\left\{1-\sqrt{1-\frac{a'^2}{u^2}}\right\}$$

La differenza $1-\sqrt{1-\frac{a'^2}{u^2}}$ divien più facile a valutarsi

allorchè si sviluppa l' espressione $\sqrt{1-\frac{a'^2}{u^2}}$; ora, la radice del primo termine 1 essendo 1, faremo

$$\sqrt{1-\frac{a'^2}{u^2}}=1+z,$$

ed avremo

$$1-\frac{a'^2}{u^2}=1+2z+z^2;$$

ma più supporremo u considerabile, più la frazione $\frac{a'^2}{u^2}$ sarà piccola, e meno la radice $1+z$ differirà dall' unità; trascurando dunque, secondo il metodo dato in *Algebra* al n.° 215, z^2 nell' equazione suddivisata, avremo

$$z=-\frac{a'^2}{2u^2}.$$

Per approssimarsi in seguito davvantaggio a questo valore, faremo $z=-\frac{a'^2}{2u^2}+z'$, e calcolerem similmente z',

la quale troveremo $-\frac{a'^4}{8u^4}$; e così di seguito (*).

Avrem dunque

$$MV = \frac{1}{2} qu\sqrt{m}\left\{1 - 1 + \frac{a'^2}{2u^2} + \frac{a'^4}{8u^4} + \text{ec.}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} q\sqrt{m}\left\{\frac{a'^2}{2u} + \frac{a'^4}{8u^3} + \text{ec.}\right\};$$

di dove si vede che più u aumenterà, più MV diminuirà, ma senza poter mai divenir nulla.

Segue da ciò che più la curva s'allontana dal punto O, più dessa avvicinasi alle rette OS ed OS' senza poter nulladimeno incontrarle; di manierachè queste rette sono i limiti delle parti KIk, K'I'k' della curva proposta, le quali non possono mai uscir dall'angolo SOS', e dal suo opposto al vertice.

119. Nel caso ove $m = o$ si ha semplicemente

$$t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{p - 2nqs};$$

riducesi la quantità, la quale è sotto il radicale, a un sol termine facendo

$$\frac{p}{2nq} - s = u,$$

e con questo mezzo s'ottiene

$$t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2nqu}, \quad \text{ovvero} \quad t = \pm \sqrt{e'u},$$

rappresentando $\frac{1}{2} nq$ per e'. Si vede facilmente che questa equazione dà $t = o$ nel medesimo tempo che $u = o$; e che Fig. 48. in conseguenza il punto del diametro DE, *fig.* 48, sul quale s'è presa l'origine delle u, appartiene alla curva cercata. Affin di trovar questo punto fa di mestieri fare $u = o$ nell'equazione

(*) *Si può ricavar pure questo sviluppo dalla formula del* binomio.

$$u = \frac{p}{2nq} - s$$

posta qui sopra; s' ottiene $s = \frac{p}{2nq}$, e portando questa quantità sopra DE dal lato delle ascisse positive, avremo il punto I dove la curva proposta incontra DE.

Se la quantità e' è positiva, non potremo prendere u che positivamente; ma nulla limiterà la sua grandezza, niente più che quella di t, di manierachè la curva debb' estendersi all'infinito da questo lato solamente, come lo indica la linea RI*r*. Essa sarebbe dal lato opposto se e' fosse stata negativa, perchè bisognerebbe allora prendere u negativamente.

L' equazione $t = \pm \sqrt{e'u}$ si costruisce prendendo una media proporzionale tra l' ascissa IN $= u$ ed una retta eguale ad e'; il resultato è l' ordinata NM, la quale bisogna qui come nei casi precedenti, portar tanto al disotto di DE che al disopra.

Fa di mestieri osservare che l' equazion primitiva

$$t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{p - 2nqs}$$

riducesi a $t = \pm \frac{1}{2} \sqrt{p}$ quando $n = 0$, poichè allora la curva considerata in quest' articolo si cangia in due linee rette condotte paralellamente all' asse delle s, ad una distanza $\frac{1}{2} \sqrt{p}$ tanto al disotto quanto al disopra di quest' asse. Queste due linee si ravvicinano all' asse a misura che p diminuisce, si riuniscono su quest' asse quando $p = 0$, ed esso diviene in questo caso il *luogo* dell' equazion proposta.

120. Dietro a ciò, ch' è stato trovato nei num.[i] precedenti, l' equazione

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f$$

non può prendere che una di queste tre forme

$$\left.\begin{array}{l} t=\pm\dfrac{b'}{a'}\sqrt{a'^2-u^2} \\ t=\pm\dfrac{b'}{a'}\sqrt{u^2-a'^2} \\ t=\pm\sqrt{c'u} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{ovvero facendo}\\ \text{sparire}\\ \text{i radicali}\end{array} \left\{\begin{array}{r} a'^2t^2+b'^2u^2=a'^2b'^2 \\ b'^2u^2-a'^2t^2=a'^2b'^2 \\ t^2=c'u, \end{array}\right.$$

secondo che m è positiva ovver negativa o nulla: desse corrispondono ai casi ove la quantità $4c-b^2$, la quale riducesi a $\dfrac{4AC-B^2}{A^2}$ (111), ed è del medesimo segno che $4AC-B^2$, è positiva, negativa o nulla; desse sono comprese pure nella sola equazione

$$t=\pm\frac{1}{2}\sqrt{p-2nqs-mq^2s^2}.$$

Le curve rappresentate dalla prima, le quali rientrano in sè stesse, e comprendono uno spazio rinchiuso da tutte le parti (115), son denotate sotto il nome d'*ellissi*. Quelle, che somministra la seconda, composte di quattro rami infiniti formanti due parti separate (117), si chiamano *iperbole*, e le rette, tra le quali esse son contenute (118), *asintoti*. Finalmente la terza equazione è quella delle *parabole* (119).

Affine di terminare la discussione di tutti i casi compresi nell'equazion generale

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex=F \quad (1)$$

altro non resta che a considerar quello ove i due coefficienti A e C son nulli; poichè, quantunque le trasformazioni operate fin qui divengano illusorie quando $A=0$, l'equazion contenente x^2, quando C non è nullo, può essere risoluta per rapporto a questa quantità, e le formule dei num.i precedenti servono pure cangiandovi y in x e x in y, vale a dire, facendo dell'asse delle ordinate quello delle ascisse: ma il caso ove A e C son nulli ambedue, sfugge interamente a queste formule, perchè l'equazione (1), ridotta allora alla forma

$$Bxy+Dy+Ex=F,$$

non è più che del primo grado per rapporto a ciascuna delle coordinate x e y: desso merita dunque un esame a parte.

Pongo quest'ultima equazione sotto la forma

$$xy + dy + ex = f;$$

ciò non ne diminuisce in nulla l'estensione; e ne ricavo

$$y = \frac{f - ex}{x + d};$$

l'ordinata non divien dunque mai immaginaria.

Se si faccia in primo luogo $y = 0$, trovasi

$$x = \frac{f}{e}.$$

Tal è l'ascissa del punto E, *fig.* 49, ove la curva cercata taglia l'asse delle ascisse AB, e dessa passa in seguito al disotto, poichè y divien negativo quando $x > \frac{f}{e}$. Quando $x=0$ viene $y=\frac{f}{d}$; valore, il quale indica il punto F dove la curva incontra l'asse AC delle y. Fig. 49.

Passando alla parte negativa dell'asse delle x, l'ordinata y continua a crescere, perchè il denominatore $x+d$ diminuisce per la sottrazione di x e diviene o, allorchè $x=-d$. In questo caso il valore infinito, che si trova per y, dimostra che la curva non potrebbe incontrare la retta GS condotta sull'ascissa $AG = -d$ perpendicolarmente all'asse AB.

Allorchè x, continuando ad essere negativo, è maggiore di d, il valore di y cangia di segno, ma cominciando ad essere maggiore di qualunque quantità, che vorremo: si fa dunque manifesto da ciò, che bisogna prendere al disotto di AB, dall'altro lato di GS, un ramo K′I′ simile a KI, ma andando in senso inverso, vale a dire, avvicinandosi ad AB a misura che l'ascissa aumenta negativamente.

Resta a sapere ciò che divenga y a misura che x aumenta, tanto positivamente quanto negativamente; e per questo io divido per x i due termini dell'espressione di y; proviene

$$y = \frac{\frac{f}{x} - e}{1 + \frac{d}{x}};$$

resultato, il quale tende quanto mai verso $y = -e$ a misura che le frazioni $\frac{f}{x}$ e $\frac{d}{x}$ diminuiscono, ovvero che x aumenta. Tirando dunque, ad una distanza $AH = e$ al disotto di AB, HS' paralella a quest' asse, avremo un limite, verso del quale i rami lk ed $l'k'$ s' approssiman quanto mai; ed in conseguenza le parti HIk e $K'I'k'$ della curva cercata non esciranno giammai dall' angolo SOS' e dal suo opposto.

Ciò, che abbiamo veduto, serve per dimostrare l' analogia, che v' è tra la curva, che considero adesso e quella ch' è chiamata *iperbola*; sarebbe parimente facile cangiar l' equazione di questa ultima nella proposta prendendo per asse delle coordinate gli asintoti indicati nel n.° 118. Io non mi fermerò su queste particolarità, dovendo tornare sopra questo soggetto con un metodo più generale (129). Mi limiterò a dimostrare che, se si prendano nell' esempio attuale delle coordinate a partirsi dal punto O, ove s' incontrano gli asintoti GS e HS', facendo

$$x = t - d, \quad y = u - e,$$

l' equazione proposta diviene

$$ut = f + de;$$

forma, sotto la quale si vede bentosto che i due rami son simili.

121. Ciascuna di quest' equazioni sembra ridotta alla forma la più semplice; ma le coordinate non vi sono perpendicolari tra loro, come nell' equazioni della linea retta, e del circolo, di cui ho fatto uso fino al presente: frattanto la situazione delle ordinate è collegata con quella delle ascisse sotto la condizion che le prime son paralelle alla retta, la quale tocca la curva all' estremità del suo diametro. Per convincersene, bisogna osservare che i punti M e M',
Fig. 46, 47 e 48. *fig.* 46, 47 e 48, si confondono in un solo nel punto I; circostanza, la quale forma il carattere essenziale dei punti di contatto (107). Infatti, la somma delle due ordinate, ovvero la distanza dei punti M e M' essendo espressa da

$\frac{2b'}{a'}\sqrt{a'^2 - u^2}$ per l' ellisse, da $\frac{2b'}{a'}\sqrt{u - a'^2}$ per l' iperbola e finalmente da $2\sqrt{c'u}$ per la parabola, divien

nulla nel punto I ove si ha $u=a'$ per le sue prime curve ed $u=o$ per la terza.

L'equazione dell'ellisse essendo simmetrica per rapporto alle due indeterminate t ed u, di manierachè l'espressione di u in t ha la medesima forma che quella di t in u, potrebbonsi prendere ancora le t per ascisse e le u per ordinate, e si vedrebbe che il diametro II', *fig.* 46, è egli stesso paralello alla tangente condotta pel punto L. Le rette II' e LL' godendo ambedue delle medesime proprietà, si chiamano per questa ragione *diametri coniugati*. Egli è manifesto che nel circolo i diametri coniugati debbon essere perpendicolari tra loro, poichè la tangente condotta all'estremità d'un diametro qualunque gli è perpendicolare: il numero de' diametri, i quali godono di questa proprietà è infinito pel circolo. Non è lo stesso a riguardo dell'ellisse; ma, benchè per questa curva l'analisi precedente non abbia fatto scoprire che con due diametri coniugati, che si tagliano obliquamente, essa ne ha nulla di meno sempre due, i quali s'incontrano ad angolo retto, così come lo vedremo più abbasso. Fig. 46.

Se si ravvicini ciò, ch'io ho fatto sull'equazion generale del second'ordine, a ciò, che abbiamo veduto nei numeri 87 e 94 per la linea retta e pel circolo, riconosceremo che l'equazione d'una medesima linea prende delle forme differentissime seguendo le coordinate, alle quali essa rapportasi. Può dunque esser utile di saper cangiare queste coordinate affin di poter passare a quelle, le quali danno per la linea proposta l'equazion la più semplice; ed io vado a cercare in conseguenza le formule generali per cangiare le coordinate d'una curva in altre situate d'una maniera qualunque, tanto per rapporto alle prime che tra di loro.

122. Il più gran cangiamento, che si possa apportare nel sistema delle coordinate senza cessar di prenderle rette, e respettivamente paralelle a due linee fisse, consiste nel dar loro una nuova origine e nuove direzioni. Io abbraccerò tutto ad un tempo questo caso generale e supporrò che ci siamo proposti d'esprimere i valori delle coordinate $AP=x$, $PM=y$, *fig.* 50, relativi agli assi AB ed AC, per due altre coordinate $A'''P''=t$, $P''M=u$, riportate agli assi A'''B'', A'''C'', di cui conoscasi la posizione a riguardo de' primi. Fig. 50.

Avendo condotte per la nuova origine A''' le rette A'''B', ed A'''C' respettivamente paralelle ad AB e ad AC, le distanze AA' ed A'A''' saranno date dall'ipotesi; e rap-

presentandole per α e per ε, avremo

$$AP = A'P + AA' = A'''P' + \alpha,$$
$$PM = P'M + A'A''' = P'M + \varepsilon.$$

Tirando in seguito pel piede della nuova ordinata P″M le linee P″Q e P″R, l'una paralella ad AB, e l'altra ad AC, osserveremo che poichè gli assi A‴B″ ed A‴C″ son dati di posizione a riguardo di AB e di AC, si debbon conoscere tutti gli angoli de' triangoli A‴P″R, P″MQ, ovvero, ciò che riducesi allo stesso, i rapporti de' loro lati omologhi; facendo dunque

$$\frac{A'''R}{A'''P''} = m, \quad \frac{P''R}{A'''P''} = n, \quad \frac{P''Q}{P''M} = p, \quad \frac{QM}{P''M} = q,$$

avremo

$$A'''R = m.\ A'''P'' = mt, \qquad P''R = n.\ A'''P'' = nt,$$
$$A''\,Q = p.\ P''M = pu, \qquad QM = q.\ P''M = qu,$$

di dove ricaveremo

$$A'''P' = A'''R + P''A = mt + pu,$$
$$P'M \ = P''R + QM \ = nt + qu,$$

e finalmente

$$x = AP = A'''P' + \alpha = mt + pu + \alpha,$$
$$y = PM = P'M \ + \varepsilon = nt \ + qu + \varepsilon.$$

Tali sono i valori più generali, che posson prendere le coordinate x e y facienti tra loro un angolo qualunque allorchè le medesime si esprimon col mezzo d'altre coordinate del medesimo genere, ma situate come vorremo. Ecco adesso come deduconsi quelle, che convengono ai differenti casi particolari, i quali possono presentarsi.

1.° Se si supponessero le nuove coordinate paralelle alle prime, e che non si facesse che cangiare la posizion dell'origine, le linee A‴C″ ed A‴C′ si confonderebbero insieme nelle stesso modo che A‴B″ ed A‴B′; avrebbonsi in conseguenza

$$m = 1, \qquad n = 0, \qquad p = 0, \qquad \text{e} \qquad q = 1,$$

e ne resulterebbe

$$x = t + \alpha, \qquad y = u + \varepsilon;$$

ciò, ch'è facile di vedere *a priori*, poichè allora $A''P''$, ed $A'''P'$ si confonderebbero nello stesso modo che $P''M$, e $P'M$.

Eguagliando a *zero*, o a o c, conserveremo nel suo posto, o l'asse AC o l'asse AB.

2.° Se non si volesse cangiare che la direzione degli assi AB ed AC, e si lasciasse sempre l'origine nel punto A; le linee $A'''B$ ed $A'''C'$ cadendo in questo caso sopra AB e sopra AC, avrebbesi nel medesimo tempo

$$a = 0 \quad \text{e} \quad c = 0$$

il che somministrerebbe

$$x = mt + pu, \qquad y = nt + qu.$$

Si vede che supponendo $m = 1$ e $n = 0$, di dove resulterebbe $x = t + pu$, $y = qu$, farebbesi coincidere la linea $A'''B'$ con $A'''B'$, ed in conseguenza non si sarebbe cangiata che la direzione dell' ordinata: dimostrerebbesi parimente che $x = mt$ e $y = nt + u$ sono i valori di x e di y relativi al cangiamento della direzion delle ascisse.

123. Fa di mestieri osservare ch' esiste tra le quantità m, n, p e q, le quali dipendono dalle direzioni delle nuove coordinate, una relazion necessaria, di manierachè non si può prenderle tutte quattro arbitrariamente, poichè, se conoscendo l'angolo degli assi primitivi $A'''B'$ ed $A'''C'$, si fossero dati ancora degli angoli $B''A'''B'$ e $C''A'''B''$, la posizione de' nuovi assi $A'''B''$ ed $A'''C''$ sarebbe interamente determinata da queste tre cose, così, allorquando tre delle quantità m, n, p e q son cognite, si costruiscono facilmente gli assi de' due sistemi di coordinate.

Infatti, sieno date m, n e p; tireremo immediatamente una linea qualunque per rappresentare l'asse $A'''B'$, e prendendo su questa linea una grandezza arbitraria $A'''R$, costruiremo un triangolo $A'''RP''$, di cui i lati $A'''R$, $P''R$ ed $A'''P''$ sieno tra loro come le quantità m, n e 1; il lato $P''R$ sarà paralello all'asse $A'''C'$ ed il lato $A'''P''$ darà l'asse $A'''B''$.

Prendendo in seguito un punto qualunque M, e conducendo MP' paralella a $P''R$, altro non resterà che a determinare la coordinata $P''M$ paralella ad $A'''C''$; ciò, che si effettuirà tirando $P''Q$ paralella ad $A'''B''$, ed osservando che $P''Q : P''M :: p : 1$. La retta $P''M$ essendo così trovata, termineremo il triangolo $P''QM$, di cui il lato $P''M$

sarà paralello all'asse $A'''C''$; ed il rapporto de'lati $P''M$ e QM darà la quantità q.

Allorchè passeremo da un sistema cognito di coordinate ad un altro sistema egualmente cognito, le quantità, m, n, p e q, calcolate secondo le loro definizioni, avranno tra loro la relazione, di cui abbiamo parlato: ma segue da ciò, che precede, che la posizion dell'origine essendo data, non si può determinare la direzione de' nuovi assi in modo da soddisfare a più di due condizioni differenti, e che nell'espressioni $x = mt + pu + \alpha$, $y = nt + qu + c$ le quantità x e y, t ed u non potrebbero essere le coordinate d'un medesimo punto relativamente a due sistemi di coordinate rette e parallelle fintantochè m, n, p e q saranno qualunque. Ecco un mezzo semplicissimo di trovare la relazione, la qual debb'esistere tra queste quantità.

Se si conducano pel punto M le rette MG e MH respettivamente perpendicolari ad $A'''B'$ ed $A'''B''$, e si suppongano cogniti gli angoli $MP'B' = C'A'''B'$, e $MP''B'' = C''A'''B''$, avremo il rapporto di $P'M$ a $P'G$ e quello di $P''M$ a $P''H$. Chiamando g il primo e h il secondo, ne resulterà

$$P'G = P'M \times g \qquad \text{e} \qquad P''H = P''M \times h;$$

tirando in seguito $A'''M$ e rappresentando $A'''P'$ e $P'M$ per x' e y', i triangoli obliquangoli $A'''P'M$ ed $A'''P''M$ daranno

$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P'}^2 + \overline{P'M}^2 + 2A'''P' \times P'G = x'^2 + y'^2 + 2gx'y',$$
$$\overline{A'''M}^2 = \overline{A'''P''}^2 + \overline{P''M}^2 + 2A'''P'' \times P''H = t^2 + u^2 + 2htu.$$

Eguagliando queste due espressioni di $\overline{A''M}^2$, conseguiremo

$$x'^2 + y'^2 + 2gx'y' = t^2 + u^2 + 2htu;$$

ponendo per x' e y' i loro valori $mt + pu$ e $nt + qu$, avremo

$$(m^2 + n^2 + 2gmn)\,t^2 + (p^2 + q^2 + 2gpq)\,u^2$$
$$+ 2\,[mp + nq + g\,(np + mq)]\,tu = t^2 + u^2 + 2htu.$$

Questa equazione dovendo aver luogo qualunque sia la posizione del punto M, bisogna che la medesima si verifichi sempre indipendentemente da t e da u; condizione, la qual somministra le tre equazioni

$$m^2+n^2+2gmn=1,\qquad p^2+q^2+2gpq=1,$$
$$mp+nq+g(np+mq)=h.$$

Eliminando g dalle due prime, il resultato

$$(m^2+n^2)pq-(p^2+q^2)mn=pq-mn$$

esprimerà le condizioni, alle quali debbono soddisfare le quantità m, n, p e q.

124. Si suppone il più spesso che le nuove coordinate u e t s'incontrino ad angolo retto nello stesso modo che le prime; in questo caso l'equazioni suddivisate si semplicizzano molto. Gli angoli MP'B$'$ e MP''B$''$ divenendo retti, P'G ovvero gy' e P''H ovvero hu svaniscono; di manierachè si ha solamente

$$m^2+n^2=1,$$
$$p^2+q^2=1,$$
$$mp+nq=0,$$

di dove ricavasi

$$m^2=1-n^2,\qquad p^2=1-q^2,$$
$$m^2p^2=1-n^2-q^2+n^2q^2;$$

ed a motivo di $mp=-nq$, s'ottiene

$$n^2+q^2=1.$$

Paragonando questo resultato coll'equazione $m^2+n^2=1$ si trova $q=m$, il che dà $p=-n$; si ha dunque finalmente

$$x'=mt-nu,\qquad y'=nt+mu,$$

osservando che le quantità m e n dipendono l'una dall'altra in virtù dell'equazione $m^2+n^2=1$.

La figura 51, costrutta per questo caso particolare, fa vedere che m è il coseno dell'angolo B$'$A$'''$B$''$, che n n'è il seno, e che si ha Fig. 51.

$$A'''P'=A'''R-P''Q=mt-nu,$$
$$P'M=P''R+QM=nt+mu,$$

com'io l'ho trovato (*).

(*) *Non vi sarebbe cosa più facile quanto quella di cangiare non solamente qui, ma ancora in tutto ciò, che precede, le denominazioni delle lettere* m, n, p *e* q *in seni e*

Affin di cangiare nello stesso tempo in questo caso l'origine delle coordinate e la direzione de' loro assi bisognerà dunque prendere

---

coseni degli angoli compresi tra gli assi delle coordinate, e si avrebbero allora le formule riportate in più opere, che si son pubblicate dopo le prime edizioni della presente. Ma il simbolo, che ho adottato, compendia l' espressioni e conserva meglio l' eleganza analitica. E' senza dubbio per questa ragione che i Sigg. Lagrange *e* Monge *hanno generalmente preferito nelle trasformazioni di coordinate, che contengono i loro scritti, delle semplici denominazioni letterali alle linee trigonometriche, che d' altronde* Eulero *aveva introdotte in questi calcoli fin dal* 1748.

La posizion respettiva de' quattro assi, i quali si tagliano nel punto A''', essendo determinata da tre angoli, ch' essi fanno due a due, si possono sciogliere in più maniere i dati del problema. La seguente m' è sembrata molto semplice.

Fig.50. *Io pongo*, fig. 50,

$$B''A'''B' = \varphi, \qquad C'A'''C'' = \psi, \qquad C'A'''B' = \omega,$$

di dove

$$C'A'''B'' = \omega - \varphi, \qquad C''A'''B'' = \omega - \psi;$$

poi facendo attenzione che in virtù del parallelismo delle rette $P''R$, QM ed $A'''C'$, $P''M$ ed $A'''C''$, $P''Q$, ed $A'''B'$ gli angoli $A'''RP''$ e $P''QM$ son supplementi di $C'A'''B'$, gli angoli $A'''P''R$ e $C'A'''B''$, $MP''Q$ e $C''A'''B'$, $P''MQ$ e $C'A'''C''$ sono eguali, avrò, dietro al n.° 122,

$$m = \frac{A'''R}{A'''P''} = \frac{\text{sen } C'\,A'''\,B''}{\text{sen } C'\,A'''\,B'} = \frac{\text{sen } (\omega-\varphi)}{\text{sen } \omega},$$

$$n = \frac{P''\,R}{A'''\,P''} = \frac{\text{sen } B''\,A'''\,B'}{\text{sen } C'\,A'''\,B'} = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \omega},$$

$$p = \frac{P''\,Q}{P''M} = \frac{\text{sen } C'\,A'''\,C''}{\text{sen } C'\,A'''\,B'} = \frac{\text{sen } \psi}{\text{sen } \omega},$$

$$q = \frac{QM}{P''M} = \frac{\text{sen } C''\,A'''\,B'}{\text{sen } C'\,A'''\,B'} = \frac{\text{sen } (\omega-\psi)}{\text{sen } \omega}.$$

$$x = mt - nu + \alpha, \quad y = nt + mu + \varsigma \ (112),$$

avendo riguardo all' equazione

$$m^2 + n^2 = 1,$$

e non potremo disporre allora che di tre quantità, cioè di α, ς e d'una delle quantità m ovvero n.

125. Vado ad esporre adesso le semplicizzazioni, le quali si possono apportare all' equazion generale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F \ldots . (1)$$

Resulta da ciò che

$$A''' P' = x' = \frac{sen\,(\omega - \varphi)}{sen\,\omega}\,t + \frac{sen\,\psi}{sen\,\omega}\,u,$$

$$P' M = y' = \frac{sen\,\varphi}{sen\,\omega}\,t + \frac{sen\,(\omega - \psi)}{sen\,\omega}\,u.$$

Non vi è più bisogno di considerare alcuna equazione di condizione; poichè non vi sono nel calcolo che le quantità necessarie alla determinazione de' sistemi di coordinate.

Se si supponga che l'angolo $C'A'''B'$ degli assi primitivi sia retto, avremo sen $\omega = 1$, e verrà solamente.

$$x' = t\,cos\,\varphi + u\,sen\,\psi,$$
$$y' = t\,sen\,\varphi + u\,cos\,\psi.$$

Egli è manifesto che l'angolo $C''A'''B''$ degli assi delle nuove coordinate è espresso in generale da $\omega - \varphi - \psi$; se desso dovesse esser retto nel medesimo tempo che quello degli assi primitivi, avrebbesi

$$1^q - \varphi - \psi = 1^q, \quad \textit{di dove} \quad \psi = -\varphi,$$

e

$$sen\,\psi = -sen\,\varphi, \quad cos\,\psi = cos\,\varphi \ (23),$$

ed in conseguenza

$$x' = t\,cos\,\varphi - u\,sen\,\varphi,$$
$$y' = t\,sen\,\varphi + u\,cos\,\varphi,$$

nello stesso modo, che dedurrebbesi immediatamente dalla figura 51, ove l'asse $A'''C''$ cade dall' altra parte dell'asse $A'''C'$ per rapporto all' asse $A'''B'$; circostanza espressa dal cangiamento di segno dell' angolo ψ. Fig. 51.

col mezzo della trasformazione delle coordinate, e non cessando di prenderle perpendicolari tra loro.

Se si faccia

$$x = mt - nu + \alpha, \qquad y = nt + mu + \epsilon,$$

il resultato della sostituzione di questi valori nell'equazione (1) sarà pure un'equazione completa del secondo grado in u e t; ma siccome vi avremo introdotto tre quantità arbitrarie, potremo imporci altrettante condizioni, le quali semplicizzino questo resultato, eguagliar, per esempio, a *zero* i coefficienti delle quantità ut, t ed u, affine di fare sparire i termini, che ne sono affetti: otterremo allora un'equazion della forma

$$A't^2 + C'u^2 = F',$$

simile alle due prime del n.° 120. Questa forma è notabile 1.° in ciò che i due valori di t essendo eguali, e di segni differenti, ne segue che l'asse delle nuove ascisse u è un diametro (111); 2.° in ciò che ciascun valore di u, preso positivamente e negativamente, dando i medesimi valori per t, ne resulta che l'origine delle u posta nel mezzo del diametro è il centro della curva (114).

Il calcolo divien più semplice allorchè in luogo d'effettuare nel medesimo tempo, mediante l'espressioni suddivisate, i cangiamenti d'origine e di direzione delle coordinate, si trasportano in primo luogo gli assi paralellamente a sè stessi. Se, per questo, si prenda

$$x = x' + \alpha, \qquad y = y' + \epsilon,$$

l'equazione (1) diverrà

$$\left.\begin{array}{l} Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 \\ +(2A\epsilon + B\alpha + D)\,y' + (2C\alpha + E)\,x' \\ +(A\epsilon^2 + B\alpha\epsilon + C\alpha^2 + D\epsilon + E\alpha = F \end{array}\right\} (2).$$

Le quantità α e ϵ essendo ambedue arbitrarie, possiamo disporne per fare sparire i termini affetti da x' e da y'; ponendo l'equazioni

$$2A\epsilon + B\alpha + D = 0. \qquad 2C\alpha + B\epsilon + E = 0 \text{ (a)}.$$

dalle quali ricavasi

$$\alpha = \frac{BD - 2AE}{4AC - B^2}, \qquad \epsilon = \frac{BE - 2CD}{4AC - B^2}.$$

Dopo di ciò altro non resta nell'equazione (2) che i termini affetti da y'^2, $x'y'$, x'^2 e de' termini indipendenti dalle coordinate x' e y'; questi ultimi si riducono col mezzo dell'equazioni (a). Infatti, moltiplicando la prima di esse per ε, la seconda per α, e togliendo la loro somma dall'equazione (2), dopo d'avervi soppressi i termini, i quali debbono svanire, conseguiremo

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2-A\varepsilon^2-B\alpha\varepsilon-C\alpha^2=F \ldots (3).$$

Pongo adesso gli assi delle coordinate in una nuova direzione, ma sempre ad angolo retto, prendendo (n.° precedente)

$$x'=mt-nu, \qquad y'=nt+mu;$$

e questi valori essendo sostituiti nell'equazione (3), la cangiano in

$$\left.\begin{array}{l} \left[An^2+Bmn+Cm\right]t^2 \\ +\left[2(A-C)mn+B(m^2-n^2)\right]ut \\ +\left[Am^2-Bmn+Cn^2\right]u^2 \\ -\left[A\varepsilon^2-B\alpha\varepsilon-C\alpha^2=F\right. \end{array}\right\} (4).$$

Le due quantità m e n non dovendo soddisfare che all'equazione $m^2+n^2=1$, ne riman una da determinarsi, ed io ne dispongo per togliere il prodotto ut, eguagliando a zero il suo coefficiente, il che somministra l'equazione

$$2(A-C)mn+B(m^2-n^2)=0 \ldots (m).$$

Facendo in seguito, per abbreviare,

$$\begin{array}{l} An^2+Bmn+Cm^2=A' \\ Am^2-Bmn+Cn^2=C' \\ A\varepsilon^2+B\alpha\varepsilon+C\alpha^2+F+F', \end{array}$$

l'equazione (4) diviene

$$A't^2+C'u^2=F',$$

e prende così la forma dimandata, supponendo sempre che si possan trovare de' valori reali per m e n, i quali son dati da equazioni di secondo grado.

126. Questi valori si deducono dalla combinazione dell'equazioni

$$\begin{array}{r} 2(A-C)mn+B(m^2-n^2)=0, \\ m^2+n^2=1; \end{array}$$

la prima dà

$$mn = \frac{B(m^2 - n^2)}{2(C-A)};$$

se si faccia $\frac{B}{2(C-A)} = \gamma$, s' alzi al quadrato il valore di mn, si elimini n^2 col mezzo dell' equazione $m^2 + n^2 = 1$, conseguiremo

$$m^4 - m^2 = -\frac{\gamma^2}{1+4\gamma^2},$$

di dove ricaveremo

$$m^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\gamma^2}{1+4\gamma^2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{1+4\gamma^2}},$$

indi
$$n^2 = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{1+4\gamma^2}};$$

ponendo in luogo di γ la quantità, ch' essa rappresenta, e sostituendo i valori di m^2 e di n^2 nell' espressione di mn, troveremo, non avendo riguardo che ai segni superiori dei radicali,

$$m^2 = \frac{1}{2} + \frac{C-A}{2\sqrt{(C-A)^2 + B^2}},$$

$$n^2 = \frac{1}{2} - \frac{C-A}{2\sqrt{(C-A)^2 + B^2}},$$

$$mn = \frac{B}{2\sqrt{(C-A)^2 + B^2}}.$$

I valori di m e di n, ricavati da quelli di m^2 e di n^2, saranno affetti dai segni $\pm$; ma si vede dall' espressione di mn che questi segni debbono essere scelti in modo che il prodotto mn sia del medesimo segno che B (*).

(*) *Se, com' egli è indicato nella* nota *pag.* 161, *si faccia* $B'A'''A' = \varphi$, *avremo*

$$m = \cos\varphi, \quad n = \operatorname{sen}\varphi,$$

di dove

Sostituendo i valori di m^2, n^2 e mn nell'espressioni di A' e di C', riunendo i termini, i quali hanno il medesimo denominatore, vedremo con un poco d'attenzione che il loro numeratore sarà divisibile per $\sqrt{(C-A)^2+B^2}$, e che

$$A' = \frac{1}{2}(C+A) + \frac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2+B^2},$$

$$C' = \frac{1}{2}(C+A) - \frac{1}{2}\sqrt{(C-A)^2+B^2}.$$

L'esame di queste espressioni conduce alle conseguenze seguenti:

1.° Le quantità A' e C' son sempre reali.

2.° Se A e C hanno il medesimo segno, il qual può supporsi allora +, cangiando, se bisogni, il segno di tutti i termini dell'equazione (1) (pag. 163), A' sarà sempre positivo e C' lo sarà solamente quando

$$C + A > \sqrt{(C-A)^2 + B^2};$$

condizione, la quale riducesi

$$(C+A)^2 > (C-A)^2 + B^2,$$

ovvero a $$2AC > -2AC + B^2,$$

ovvero a $$4AC > B^2,$$

e dalla quale resulta che $4AC-B^2$ è una quantità positiva.

3.° Se A e C son di segni diversi, ovvero che A essendo positivo o reso tale, C sia negativo conseguiremo

---

$$mn = sen\,\varphi\, cos\,\varphi = \frac{1}{2} sen\, 2\varphi, (11),$$

$$m^2-n^2 = cos\,\varphi^2 - sen\,\varphi^2 = cos\, 2\varphi,$$

ed in conseguenza

$$\frac{\frac{1}{2} sen\, 2\varphi}{cos\, 2\varphi} = \frac{1}{2} tang\, 2\varphi = \frac{mn}{m^2-n^2} = \frac{B}{2(C-A)};$$

formula, che dà immediatamente l'angolo, che fa l'asse dei t *con quello delle* x.

$$A' = \frac{1}{2}(A-C) + \frac{1}{2}\sqrt{(C+A)^2+B^2},$$

$$C' = \frac{1}{2}(A-C) - \frac{1}{2}\sqrt{(C+A)^2+B^2};$$

allora A' sarà positivo e C' negativo: ma a motivo del segno —, dal quale è affetto 4AC, la quantità $4AC - B^2$ è negativa.

Segue da ciò che il segno di C' dipende da quello della quantità $4AB - B^2$.

4.° Finalmente, se $4AC = B^2$, conseguiremo $C' = 0$; circostanza notabile non solamente perchè dessa riduce ad $A't^2 = F'$ la trasformata $A't^2 + C'u = F'$, ma ancora perchè la medesima rende infinite l' espressioni di α e di ϵ (pag. 165); non si può dunque in questo caso far disparire nel tempo stesso i termini affetti da y' e da x' nell' equazione (2).

127. Affine di riparare a quest' inconveniente, farò immediatamente nell' equazione (1)

$$x = mt - nu, \qquad y = nt + mu;$$

ciò, che darà

$$\left.\begin{array}{l} [An^2 + Bmn + Cm^2]\, t^2 \\ + [2(A-C)mn + B(m^2 - n^2)]\, ut \\ + [Am^2 - Bmn + Cn^2]\, n^2 \\ + (Dn + Em)t + (Dm - En)u = F \end{array}\right\} (5)$$

Porrò anche adesso l' equazione

$$2(A - C)\, mn + B(m^2 - n^2) = 0 \ldots (m),$$

per far sparire il prodotto ut; i valori di m e di n, come pure quelli de' coefficienti di t^2 e di u^2 saranno dunque gli stessi che quelli del n.° precedente, e la trasformata qui sopra diverrà

$$A't^2 + C'u^2 + (Dn + Em)t + (Dm - En)\, u = F \ (6).$$

Affine di terminar di semplicizzarla, resta da cangiare l' origine delle coordinate facendo

$$t = t' + \alpha', \qquad u = u' + \epsilon,$$

ed otterremo

$$\left.\begin{array}{l} A't'^2 + C'u'^2 + (2A'\alpha' + Dn + Em)t' \\ \qquad\qquad\qquad + (2C'\varsigma' + Dm - En)u' \\ + A'\alpha'^2 + C'\varsigma'^2 + (Dn + Em)\alpha' + (Dm - En)\varsigma' = F \end{array}\right\}.$$

Egli è ancora evidente sotto questa forma che il termine affetto da u' non può disparire quando $C' = 0$, poichè l'equazione

$$2C'\varsigma + Dm - Eu = 0,$$

la quale bisognerebbe porre in questo caso, darebbe ς' infinito: disporrò dunque delle due quantità arbitrarie α' e ς' per togliere il termine affetto da t', e quelli, i quali sono indipendenti dalle coordinate u' e t'; ciò, che produce l'equazioni

$$2A'\alpha' + Dn + Em = 0,$$
$$A'\alpha'^2 + C'\varsigma'^2 + (Dn + Em)\alpha' + (Dm - En)\varsigma' - F = 0.$$

Facendo in seguito, per abbreviare,

$$2C'\varsigma' + Dm - En = -E',$$

avrò l'equazione

$$A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0.$$

Per riconoscere tutti i casi compresi in questa trasformazione, bisognerebbe cercare quando α' e ς' posson esser determinate dalle due prime equazioni poste di sopra: ma è necessità, per l'oggetto presente, considerare il sol caso ove $C' = 0$ (*); ciò, che riduce queste medesime equazioni a

$$2A'\alpha' + Dn + Em = 0,$$
$$A'\alpha'^2 + (Dn + Em)\alpha' + (Dm - En)\varsigma' - F = 0,$$

e la trasformata in t' ed u' ad

$$A't'^2 = E'u'.$$

(*) *Tutti gli altri casi sono compresi nell' equazione*

$$A't^2 + C'u^2 = F',$$

la quale si cangia facilmente in

$$A't^2 + C'u^2 - E'u' = 0,$$

facendo $u = u' \pm \sqrt{\frac{F'}{C'}}$, ed $E' = \pm 2\sqrt{C'F'}$.

Si semplicizzano ancora l'equazioni tra α' e c' togliendo la seconda dalla prima moltiplicata per α' ed osservando che l'ipotesi $C'=0$ somministra

$$Dm - En = -E'.$$

Si ottiene allora

$$\left.\begin{array}{l} 2A'\alpha' + Dn + Em = 0 \\ A'\alpha' - E'c' - F \quad = 0 \end{array}\right\} \ldots (a').$$

Finalmente l'ipotesi $C'=0$, la qual corrisponde a $4AC=B^2$ essendo stabilita nei resultati del n.° precedente, gli cangia in

$$A' = C + A,$$

$$m^2 = \frac{C}{C+A}\; n^2 = \frac{A}{C+A}\; mn = \frac{\sqrt{AC}}{C+A}.$$

Allorchè $Dm - En = 0$ si ha $E'=0$, e l'equazioni (a') non contenendo altro che l'incognita α', possono non accordarsi; ma in questa ipotesi e facendovi $C'=0$, la trasformata in t ed u (pag. 168) prende la forma

$$A't^2 + D't = F,$$

ed altro non contiene che la coordinata t.

128. Tutti i casi dell'equazion generale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F$$

son dunque compresi nelle tre trasformate

$$A't^2 + C'u^2 = F',$$
$$A't'^2 = E'u',$$
$$A't^2 + D't = F;$$

le due ultime corrispondono al solo caso ove $4AC=B^2$ e la prima a tutti gli altri.

Le tre forme indicate nel n.° 120 si trovano nelle due prime equazioni suddivisate, con la sola differenza che le coordinate sono adesso perpendicolari tra loro; e per questa ragione si chiamano *assi* i diametri, ai quali sono allor riportate le curve, che rappresentano queste equazioni, di cui io vado a rammentare le circostanze principali.

1.° Se le quantità A' e C' sono ambedue positive, il che corrisponde ai casi dell'equazion generale, nei quali $4AC - B^2$ ha il segno $+$, la trasformata

$$A't^2 + C'u^2 = F'$$

dando

$$t = \pm \sqrt{\frac{F' - C'u^2}{A'}},$$

appartiene ad un' ellisse (120).

Si trovano i semi-assi OI ed OL, *fig.* 52, cercando il valore di u allorchè $t=0$ e quello di t allorchè $u=0$; s' ottengon così Fig.52.

$$OI = \sqrt{\frac{F'}{C'}}, \quad OL = \sqrt{\frac{F'}{A'}};$$

e rappresentando queste linee per a e b, se ne conclude

$$\frac{F'}{C'} = a^2, \text{ di dove } C' = \frac{F'}{a^2},$$

$$\frac{F'}{A'} = b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots A' = \frac{F'}{b^2},$$

$$\frac{t^2}{b^2} + \frac{u^2}{a^2} = 1 \text{ d'onde } t = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - u^2},$$

resultato il quale è simile a quello del n.° 115 e che si costruisce nella stessa maniera.

Il caso attuale comprende pure l'equazione del circolo, la qual si presenta quando $C'=A'$; poichè allora la trasformata diviene

$$A'(t^2 + u^2) = F', \text{ ovvero } t^2 + u^2 = \frac{F'}{A'},$$

e le coordinate sono ad angolo retto.

L' equazione $A't^2 + C'u^2 = F'$ diviene assurda quando A' e C' restando positivi, F' è negativo; ma dessa può verificarsi facendo $t=0$, $u=0$ allorchè $F'=0$, e non rappresenta allora che il punto dove è l'origine delle coordinate: questa è l' ellisse ridotta al suo centro (116). Ponendo nel valore di F' (pag. 165) quelli di α e di ϵ, esprimeremo senza pena pei coefficienti dell' equazione (1) le condizioni, cui essa dee soddisfare per significar qualche cosa.

2.° Se A', C' son di segni differenti, il che corrisponde al caso ove $4AC - B^2$ ha il segno —, l'equazione in t ed u prende necessariamente una delle forme seguenti:

$$A't^2 - C'u^2 = F'$$
$$A't^2 - C'u^2 = -F' \;;$$

se si pongono per A' e C' i loro valori in a e b, proviene, dopo le riduzioni,

$$\frac{t^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2} = 1, \quad \text{di dove } t = \pm \frac{b}{a} \sqrt{u^2 + a^2},$$

$$\frac{t^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2} = -1 \ldots\ldots\ldots t = \pm \frac{b}{a} \sqrt{u^2 - a^2}.$$

Queste due equazioni appartengono ad iperbole (120); ma la prima di queste è attraversata dall'asse de' t e non da quello delle u, perchè non vi si può avere $t=0$; il contrario ha luogo per la seconda.

Fa di mestieri osservare che quantunque il valore $t = \sqrt{-b^2}$, il quale corrisponde ad $u=0$ nella seconda, sia

Fig.53. immaginario, non lasciasi d' innalzare nel centro O, *fig.* 53, una perpendicolare $OL = \sqrt{b^2} = b$, e che per l'analogia con l' ellisse si chiama *secondo asse* la linea LL doppia di OL; ma si distingue col nome di *asse traverso* la linea II, la quale incontra la curva, il che non potrebbe farlo la linea LL'.

Allorchè $C' = A'$ gli assi divengono eguali, e l' iperbola è *equilatera*.

Egli è manifesto che quando $F' = 0$ l'equazioni dell'iperbola si riducono a

$$A't^2 - C'u^2 = 0, \text{ ovvero } t = \pm u \sqrt{\frac{C'}{A'}},$$

e non rappresentan altro che due linee rette (118).

3.° Quando si ha $4AC = B^2$ la trasformata essendo

$$A't^2 = E'u', \text{ ovvero } t' = \pm \sqrt{\frac{E'}{A'} u'},$$

appartiene ad una parabola, la quale incontra al suo asse

Fig.54. IB, *fig.* 54, all' origine delle coordinate t' ed u'.

Quando $E' = 0$, e l' equazioni (a') (pag. 170) concordano, viene $A't'^2 = 0$; resultato, il quale dando due volte $t' = 0$, indica l' asse IB, su cui i rami della parabola tendono a riunirsi allorchè E' diminuisce.

L' ultima trasformata

$$A't^2 + D't = F$$

non dando pure per t che due valori determinati, indica due rette paralelle all'asse delle u.

Finalmente egli è a proposito d'osservare che l'equazione

$$A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0 \quad (127)$$

è comune all'ellisse, all'iperbola e alla parabola; si ha la prima di queste curve quando A' e C' son del medesimo segno; la seconda quand'esse sono di segni diversi; e la terza allorchè $C' = 0$.

Il punto, sul quale si trova l'origine delle coordinate, essendo posto a una dell'estremità dell'asse, si chiama il *vertice*. Nell'ellisse e nell'iperbola vi sono due vertici segnati I ed I', *figura* 52 e 53; la parabola non avendone che un solo, *fig.* 54, non ha centro, ed è per questa ragione che la sua equazione non potrebbe prender la forma Fig. 52, 53 e 54.

$$A't^2 + C'u^2 = F'.$$

129. Dopo d'avere riconosciuto per le formule dei num.[i] precedenti a quale specie di linee si riporti un tal caso particolare che vorremo dell'equazion generale, si ha pur bisogno, per segnar questa linea, di stabilire gli assi delle coordinate della trasformata per rapporto agli assi primitivi, e di costruire le quantità A', C' F', ovvero E'; questo è ciò, in che il lettore, per quanto sia poco abituato a particolarizzar delle formule generali, non potrebbe incontrare difficoltà: così io non credo che sia necessario per mezzo di operazioni, le quali non son di quelle, che si pratican di sovente, d'entrare in una enumerazione di regole quasi sempre scancellate dalla memoria allorchè accade d'averne bisogno; e l'esempio seguente, benchè semplicissimo, servirà d'altronde per dimostrarne l'inutilità.

Sia l'equazione

$$xy + Dy + Ex = F;$$

paragonandola con l'equazione (1), ne concluderemo

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0,$$
$$4AC = 0, \qquad B^2 = 1;$$

e poichè $4AC$ non è eguale a B^2, è alla trasformata

$$A't^2 + C'u^2 = F'$$

che riportasi il caso, che si considera. Si trova in seguito (pag. 165.)

$$\alpha = -D, \quad \epsilon = -E, \quad F' = F + DE;$$

poi (pag. 167.)

$$A' = \frac{1}{2}, \quad C' = -\frac{1}{2},$$

ed in conseguenza

$$\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}u^2 = F + DE \text{ ovvero } t^2 - u^2 = 2(F + DE);$$

la curva cercata è dunque un' iperbola, di cui i semi-assi sono eguali a $\sqrt{2(F+DE)}$, ed è traversata da quello de' t (118). Risalendo alle trasformazioni operate dai valori

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \epsilon,$$
$$x' = mt - nu, \quad y' = nt + mu,$$

si vede in primo luogo che l' origine delle t e delle u corrisponde al punto ove $x = \alpha$, $y = \epsilon$; prendendo dunque,
Fig.55. *fig.* 55, le distanze $AA' = -D$, $AA'' = -E$, il punto A''' sarà questa origine. Calcolando in seguito il valore di m, ovver del coseno dell' angolo, che forma l' asse de' t con quello delle x, troveremo il numero $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il qual corrisponde a $0^{\circ}, 5$; e facendo l' angolo $A''A'''B''$ eguale a $0^{\circ}, 5$, poi conducendo $A'''C''$ perpendicolarmente ad $A'''B''$, avremo gli assi delle t e delle u; prendendo finalmente $A'''I$ ed $A'''I' = \sqrt{2(F+DE)}$, determineremo i vertici I, ed I' dell' iperbola, la quale è il *luogo* dell' equazione proposta.

Lo stesso andamento condurrà sempre al resultato per qualunque esempio che fosse, ed io ho scelto il precedente, di già trattato nel n.° 120, affine di dimostrare che la curva indicata in questo num.° pei suoi asintoti è un' iperbola, e di trovarne i suoi assi (*).

(*) *Potrebbesi dedurre immediatamente dall' equazion generale delle linee di second' ordine l' equazion dell' iperbola per rapporto ai suoi asintoti, trasformando le coordinate rettangole in altre, di cui l' angolo sia indeterminato. S' in-*

Spesso pure si cerca qual sia la curva dotata d'una proprietà particolare, che ignorasi appartenere a una curva digià conosciuta; ma allora l'equazion relativa a questa proprietà rientra in alcuna dell'equazioni, le quali sono state discusse; questo è ciò, che dimostreranno i problemi seguenti.

130. *Trovar l'equazione d'una curva tale che, se si conducano da ciascun de' suoi punti* M *fig.* 52, *a due punti fissi* F *e* F' *le rette* MF *e* MF', *la somma di queste linee sia eguale ad una linea data.* Fig. 52.

Se si rappresenti per $2a$ la linea data, per $2c$ la distanza FF' dei punti fissi, prendendo per origine delle coordinate il punto O mezzo di FF', di manierachè $OF=OF'=c$ e facendo $OP=x$, $PM=y$, troveremo

$$FP=c-x, \qquad F'P=c+x.$$

I triangoli PMF, PMF', rettangoli in P, dando

$$MF=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{PM}^2}, \quad MF'=\sqrt{\overline{F'P}^2+\overline{PM}^2},$$

otterremo

$$MF=\sqrt{(c-x)^2+y^2}, \quad MF'=\sqrt{(c+x)^2+y^2};$$

ma ponendo $MF=z$, conseguiremo $MF'=2a-z$, poichè, per l'enunciato, si ha su tutta la curva cercata

$$MF+MF'=2a,$$

ed in conseguenza

$$z=\sqrt{(c-x)^2+y^2}, \quad 2a-z=\sqrt{(c+x)^2+y^2}.$$

Inalzando al quadrato, per far disparire i radicali, ne resulterà

$$z^2=c^2-2cx+x^2+y^2,$$
$$4a^2-4az+z^2=c^2+2cx+x^2+y^2,$$

togliendo la seconda di queste equazioni dalla prima, resterà

---

troducon allora quattro quantità arbitrarie (123), *delle quali se ne dispone per fare sparire i termini affetti da* t^2, u^2, t, u; *ciò, che riduce l'equazion generale di secondo grado alla forma* $B'ut=F$; *ma si trova che le quantità* m *e* n *non han de' valori reali fuorchè nel caso, in cui* $4AC-B^2$ *ha il segno* —, *vale a dire per l'iperbola solamente.*

$$-4a^2+4az=-4cx\,,$$

di dove

$$a=\frac{a^2-cx}{a}\,;$$

sostituendo finalmente questo valore di z nella prima espressione di z^2, perverremo all'equazione cercata, la quale sarà, dopo le riduzioni,

$$a^4+c^2x^2=a^2c^2+a^2(x^2+y^2).$$

Quest'equazione non essendo che di secondo grado, fa vedere che la curva cercata non può essere che una di quelle, le quali sono state discusse precedentemente; e per riconoscere a quale specie essa appartiene, io do alla sua equazione la forma

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^4-a^2c^2.$$

Paragonandola allora con $A't^2+C'u^2=F'$, dopo avere scritto in quest' ultima y e x per t ed u, avremo

$$A'=a^2\,,\ C'=a^2-c^2\,,\ F'=a^4-a^2c^2=a^2(a^2-c^2)\,,$$

di dove concluderemo ch'essa è quella d'un'ellisse; poichè essendo minore di a, le quantità A', C', F' sono essenzialmente positive (128). Ponendo, per abbreviare, $a^2-c^2=b^2$, otterremo

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2\,,$$

di dove ricaveremo

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

I semi-assi OI ed OL di questa ellisse son respettivamente a e b; e siccome $b^2=a^2-c^2$, ricavasi da ciò

$$c^2=a^2-b^2\,,\qquad c=\sqrt{a^2-b^2}\,;$$

il che fa vedere che, allorquando si conoscono gli assi II' ed LL' d'un'ellisse, si posson trovare sul maggiore dei due i punti F e F', pei quali MF + MF' = II' col descrivere dal punto L, come centro, e con un raggio eguale alla metà del grand' asse II' un arco di circolo; poichè alle intersezioni F e F' di quest'arco di circolo con l'asse II' si ha

$$OF=OF'=\sqrt{\overline{FL}^2-\overline{OL}^2}=\sqrt{a^2-b^2}.$$

L'enunciato del problema, che ho risoluto, offre dunque una proprietà comune a tutte l'ellisse, cioè che *la somma delle rette* MF e MF', *le quali si chiamano* raggi vettori, *condotte ai punti fissi* F *e* F' *presi sul grand'asse e che si chiamano* fuochi, *è sempre eguale al grand' asse.*

131. Questa proprietà somministra un mezzo semplicissimo di trovar tanti punti quanti vorremo dell'ellisse, ovvero di descriverle ancora con un movimento continuo. Infatti, se si prenda a piacere un'apertura di compasso FM, minore di OI, dal punto F, come centro, si descriva un circolo con quest'apertura di compasso, e si prenda in seguito per centro il punto F', e per raggio la differenza F'M tra il primo raggio FM e l'asse II', e si descriva un secondo circolo, desso taglierà il primo in due punti M e M', i quali apparterranno all'ellisse. Ripetendo questo metodo con diverse aperture di compasso, otterremo de' nuovi punti dell'ellisse richiesta; e se questi punti son un poco moltiplicati, potremo, unendoli con un tratteggio libero della mano, terminar la curva d'una maniera tanto più esatta, quanto in maggior numero saranno i punti determinati.

Allorchè l'ellisse debb' esser grandissima, dessa descrivesi con un movimento continuo fissando ai punti F e F' l'estremità d'una corda, la cui lunghezza è quella dell'asse II'; si tende questa corda col mezzo d'uno stile M, il quale si fa strisciare lungo della medesima corda fino a che si trovi il medesimo al punto di dove egli è partito: allora desso ha descritto l'ellisse richiesta.

Egli è utile di rammentarsi che la distanza *c* dà un fuoco al centro si chiama *eccentricità.*

L'equazione $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ somministra una costruzione per punti comodissima nella pratica. Avendo descritto dal centro O dell'ellisse richiesta, *fig.* 56, due semicircoli, l'uno sul grand' asse e l'altro sul piccolo, presi per diametri, e condotto un gran numero di raggi ON, ON', ec., abbasseremo sull'asse II' le perpendicolari PN, P'N', ec., e condurremo pei punti R, R', ec., ove i raggi ON, ON', ec. incontrano il più piccolo de' due circoli, le rette RM, R'M', ec. paralelle ad II'; i punti M e M', ec., che queste paralelle determineranno sulle perpendicolari PN, P'N' ec., apparterranno all'ellisse cercata. Mediante l'operazione, che ho indicata, non si ottiene che Fig. 56.

la metà di questa curva; ma ripetendo la costruzione al disotto dell'asse II', l'avrem tutta intera.

Affine di riconoscere l'esattezza di questa costruzione, è da osservarsi che in virtù del parallelismo delle rette RM ed II' si ha

$$ON : OR :: PN : PM;$$

e poichè $ON=a$, $OR=b$, $OP=x$, ne resulterà

$$PN=\sqrt{\overline{ON}^2-\overline{OP}^2}=\sqrt{a^2-x^2},$$

$$a : b :: \sqrt{a^2-x^2} : PM,$$

di dove

$$PM=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=y.$$

132. Modificherò in quest'articolo il problema, che ho risoluto nel num.° precedente, e dimanderò che si abbia $MF'-MF=II'=2a$, *fig.* 53, in luogo di $MF+MF'=2a$, vale a dire, che *la differenza dei raggi vettori sia costante*. Conservando d'altronde le denominazioni dell'articolo citato, avremo

Fig. 53.

$$MF=\sqrt{\overline{FP}^2+\overline{PM}^2}=\qquad z+\sqrt{(c-x)^2+y^2},$$

$$MF'=\sqrt{\overline{F'P}^2+\overline{PM}^2}=2a+z=\sqrt{(c+x)^2+y^2},$$

di dove ricaveremo

$$z^2=c^2-2cx+x^2+y^2,$$
$$4a^2+4az+z^2=c^2+2cx+x^2+y^2;$$

togliendo la prima di queste equazioni dalla seconda, otterremo

$$4a^2+4az=4cx,\text{ ovvero } z=\frac{cx-a^2}{a},$$

e mediante questo valore di z arriveremo all'equazione

$$\left(\frac{cx-a^2}{a}\right)^2=c^2-2cx+x^2+y^2,$$

la quale, mediante lo sviluppo, si riduce a

$$(c^2-a^2)x-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Nel caso attuale, ove $c>a$, fa di mestieri prendere $b^2=c^2-a^2$, il che somministra

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2\ ;$$

equazione appartenente all'iperbola, la quale gode in conseguenza di questa proprietà, *che la differenza de' suoi raggi vettori* MF *e* MF' *è eguale all'asse trasverso* II', *sul quale si trovano i fuochi* F *e* F'.

Io ho digià fatto osservare che questa curva non aveva, a parlar propriamente, che un asse (128), ma che, per conservare l'analogia, si concepiva un secondo asse LL' condotto pel punto O, perpendicolarmente al primo; b esprime la lunghezza OL della metà di quest'asse, e l'equazione $b^2=c^2-a^2$ dando $c=\sqrt{a^2+b^2}$, fa vedere che, per trovar i fuochi F e F', è di mestieri prendere le distanze OF ed OF' eguali all'ipotenusa del triangolo rettangolo costrutto su i due semi-assi OI ed OL.

133. La proprietà, di cui godono i fuochi F e F', può servire alla costruzion dell'iperbola per punti. Per questo, dal punto F, come centro, e con un raggio FM, il quale non sia minore di IF, ma d'altronde qualunque, descriveremo un arco di circolo; dipoi prenderemo un raggio F'M maggiore o minore del primo d'una quantità eguale ad II'; ed il circolo descritto su quest'ultimo dal punto F', come centro, taglierà il primo nei due punti M e M' appartenenti all'iperbola.

Per descrivere una porzione qualunque d'iperbola con un movimento continuo, si assoggetta una riga a girare intorno del punto F'; si fissa all'estremità R di questa riga ed al punto F un filo, la cui lunghezza sia minore di F'R della quantità II'; si fa in seguito girare la riga appoggiando contro di essa con uno stile M il filo RMF, di maniera che desso resti sempre teso: lo stile M descrive in tal maniera un arco di curva, il quale appartiene all'iperbola, di cui l'asse è II' e di cui i fuochi sono F e F'.

134. Io mi proporrò ancora di trovar *l'equazione d'una curva tale che ciascun de' suoi punti sia tanto lontano dalla retta* AC, *data di posizione*, *fig.* 54, *quanto da un punto fisso* F, *egualmente dato di posizione.* Fig. 54.

Se si prenda sulla retta AB, condotta pel punto F perpendicolarmente ad AC, un punto I situato nel mezzo della distanza AF, questo punto apparterrà necessariamente alla curva cercata, poichè desso sarà tanto lontano dalla retta AC

quanto dal punto F. Facendo

$$\mathrm{IF} = \mathrm{AI} = c', \quad \mathrm{IP} = x, \quad \mathrm{PM} = y,$$

avremo, per un punto qualunque M, la distanza

$$\mathrm{QM} = \mathrm{AP} = \mathrm{AI} + \mathrm{IP} = c' + x;$$

ed il triangolo rettangolo FPM darà

$$\mathrm{MF} = \sqrt{\overline{\mathrm{FP}}^2 + \overline{\mathrm{PM}}^2} = \sqrt{(c' - x^2) + y^2},$$

poichè FP = IF — IP. Sviluppando, troveremo

$$\mathrm{MF} = \sqrt{c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2};$$

ma, per l'enunciato del problema, QM = MF, dunque

$$c' + x = \sqrt{c'^2 - 2c'x + x^2 + y^2}.$$

Inalzando al quadrato e riducendo, si ottiene

$$2c'x = -2c'x + y^2, \text{ ovvero } y^2 = 4c'x;$$

equazione della parabola (128).

135. Affine di costruire la curva dietro alla proprietà, che ho impiegata nella ricerca della sua equazione, fa di mestieri con un raggio FM, preso a piacere, descrivere un circolo, fare AP = FM, e condurre pel punto P, parallelamente alla linea AC, una retta PM: il punto M, ove questa retta taglierà il circolo, apparterrà alla parabola richiesta; poichè egli è evidente che la retta QM, essendo parallela ed eguale ad AP, sarà eguale ad FM.

Questa medesima proprietà dà luogo ad un movimento continuo, mediante il quale si descrive la curva. Per questo, si pone lungo di AC una riga, sulla quale si fa muovere una squadra, di cui uno de' lati rappresenta la retta QE; si attacca al punto F l'estremità d'un filo, la cui lunghezza è eguale a QE, e di cui l'altra estremità è fissa nel punto E; si tende questo filo con uno stile applicandolo contro il lato QE, e lo stile descrive una porzione di parabola.

136. Il problema, il quale ha condotto qui sopra all'equazione della parabola, può esser modificato in modo da abbracciar le tre curve di secondo grado: bisogna per questo enunciarlo nel modo seguente. *Trovare l'equazion d'una curva, nella quale la distanza tra un punto qualunque M,*
Fig.57. *ed il punto fisso F, fig. 57, stia alla distanza MQ tra il*

medesimo punto M *ed una retta* AC *data di posizione in un rapporto costante.*

Sia $1 : n$ questo rapporto, e si tiri dal punto F sopra AC la perpendicolare AB; è manifesto che la curva cercata incontra questa retta in un punto I tale che

$$IF : AI :: 1 : n;$$

di manierachè, se si denoti IF per c', ne resulterà

$$AI = nc'.$$

Facendo $IP = x$, $PM = y$, otterremo, in virtù del triangolo PMF, nello stesso modo che sopra,

$$MF = \sqrt{(c' - x)^2 + y^2};$$

e siccome $QM = AP = AI + IP = nc' + x$, avremo

$$\sqrt{(c' - x)^2 + y^2} : nc' + x :: 1 : n,$$

di dove ricaveremo

$$nc' + x = n\sqrt{(c' - x)^2 + y^2};$$

inalzando al quadrato otterrem finalmente

$$n^2y^2 + (n^2 - 1)x^2 - 2(n + 1)nc'x = 0.$$

Questa equazione, d'una formula assolutamente simile all'equazione $A't^2 + C'u'^2 - E'u' = 0$ del num.° 128, apparterrà all'ellisse, all'iperbola o alla parabola secondo che avremo $n > 1$, $n < 1$, ovvero $n = 1$, e fa vedere in conseguenza che la proprietà, che fa il soggetto del problema proposto è comune alle tre curve di secondo grado, per rapporto alle quali la retta AC è detta *direttrice.*

Dando all'equazione suddivisata la forma

$$y^2 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)x^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)c'x = 0,$$

ed osservando che più n aumenta, più le frazioni $\frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n}$ diminuiscono, vedremo che nella supposizione di n infinita dessa dee ridursi a

$$y^2 + x^2 - 2c'x = 0;$$

equazione, la quale è quella d'un circolo, il cui raggio è

c', e pel quale l'origine dell'ascisse è posta ad una dell' estremità del diametro (94).

137. Abbiam veduto nel n.° 128 che l'ellisse, l'iperbola e la parabola, possono esser date da una sola equazione; ed è notabile che quest' ultima può dedursi pure immediatamente da una qualunque dell'equazioni

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \quad y=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

le quali, riportandosi al centro, sembrano particolari all'ellisse e all' iperbola. Per questo basta di trasportare l'origine delle cordinate ad un de'vertici delle curve, che rappresentano queste equazioni. Infatti, se nelle *figure* 52 e 53 si faccia IP $=x'$, avrem per la prima

Fig. 52 e 53.

$$x \text{ ovvero } OP = OI - IP = a - x',$$

e per la seconda

$$x \text{ ovvero } OP = OI + IP = a + x'.$$

La sostituzione di questi valori cangerà l'equazioni riportate qui sopra in

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2, \quad y^2=\frac{2b^2}{a}x'+\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

le quali si ridurranno a

$$y^2=px'-\frac{p}{2a}x'^2, \quad y^2=px'+\frac{p}{2a}x'^2,$$

se si ponga $\frac{2b^2}{a}=p$; e l'una non differirà dall' altra che pel segno di a; l'ispezione della *figura* 53 dimostra pure che l'ascissa IP, essendo riguardata come positiva, l'asse II' è necessariamente negativo.

Ponendo per b^2 il suo valore, relativo tanto all' ellisse, che all'iperbola, s' ottiene

$$p=\frac{2(a^2-c^2)}{a}(130), \quad p=\frac{2(c^2-a^2)}{a}(132);$$

ma egli è a proposito d'introdurre la distanza IF in luogo di c, la quale rappresenta la distanza OF; e facendo IF$=c'$, si trova per la *figura* 52,

c ovvero $\mathrm{OF} = \mathrm{OI} - \mathrm{IF} = a - c'$,

per la *figura* 53

c ovvero $\mathrm{OF} = \mathrm{OI} + \mathrm{IF} = a + c'$;

questi valori danno

$$p = \frac{4ac' - 2c'^2}{a},\ p = \frac{4ac' + 2c'^2}{a};$$

espressioni, le quali pure non diferiscono che pel segno di a.

Ambedue le dette espressioni essendo riunite nella formula

$$p = \frac{4ac' \mp 2c'^2}{a} = 4c' \mp \frac{2c'^2}{a},$$

hanno egualmente per limite

$$p = 4c'$$

allorchè si suppone a infinita; ma in questo caso l'equazioni

$$y'^2 = px' \mp \frac{p}{2a} x'^2$$

riducendosi a

$$y'^2 = px',\ \text{ovvero}\ y^2 = 4c'x,$$

per l'annientamento della frazione $\frac{p}{2a}$ e danno così l'equazione della parabola (134).

L'equazione

$$y'^2 = px' - \frac{p}{2a} x'^2$$

è dunque propria per rappresentare ciascuna delle linee di second' ordine : dessa apparterrà all' ellisse quando a sarà positiva ed al circolo se $p = 2a$; all' iperbola quando a sarà negativa, ed alla parabola allorchè a sarà infinita (*).

(*) *L' espressione* $\mathrm{p} = \frac{4\mathrm{ac}' - 2\mathrm{c}'^2}{\mathrm{a}}$ *la quale si rapporta all' ellisse, prenderebbe un valor negativo se vi si suppo-*

138. La quantità p si chiama il *parametro* : questo è nell' ellisse e nell' iperbola una terza proporzionale ai due assi poichè il suo valore

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$$

conduce alla proporzione

$$2a : 2b :: 2b : p ;$$

e nelle tre curve esso esprime il valore della doppia ordinata, che passa pel fuoco. Infatti, allorchè si prenda $x' = c'$, proviene

$$y^2 = pc' \mp \frac{p}{2a} c'^2 = \frac{p(2ac' \mp c'^2)}{2a},$$

di dove concludesi

$$4y^2 = p\,\frac{4ac' \mp 2c'^2}{a} = p^2, \text{ e } 2y = p.$$

139. L' equazioni

$$y^2 = px' \mp \frac{p}{2a} x'^2$$

essendo poste sotto la forma

$$y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' - x'^2),\; y^2 = \frac{p}{2a}(2ax' + x'^2),$$

se ne deducono le seguenti

$$\frac{y^2}{x'(2a - x')} = \frac{p}{2a},\; \frac{y^2}{x'(2a + x')} = \frac{p}{2a},$$

dalle quali resulta che il quadrato dell' ordinata PM è in un

---

nesse $c' > 2a$; *e l'equazione* $y^2 = px' - \frac{p}{2a} x'^2$ *cangiandosi in*

$$y^2 = -px' + \frac{p}{2a} x'^2$$

apparterrebbe all' iperbola; ma c' esprimerebbe allora la distanza tra il vertice e il fuoco il più lontano, ovvero IF' fig. 53.

rapporto costante col prodotto delle linee IP ed I'P, le quali sono respettivamente x' e $2a-x'$ per l'ellisse, *fig.* 52, Fig. 52
x' e $2a+x'$ per l'iperbola, *fig.* 53. Queste distanze del e 53.
piede dell' ordinata da ciascuno de' vertici della curva essendo chiamate *ascisse*, si dice che *nell' ellisse e nell' iperbola i quadrati dell' ordinate stanno tra loro come i prodotti delle ascisse corrispondenti.*

Infatti, se si denoti per X' un'ascissa differente da x', ma sempre contata dal medesimo punto, e per Y l'ordinata corrispondente, avremo

$$Y^2=\frac{p}{2a}\,(2aX'-X'^2),\qquad Y^2=\frac{p}{2a}\,(2aX'+X'^2),$$

di dove ricaveremo

$$y^2 : Y^2 :: x'(2a-x') : X'(2a-X')$$

per l' ellisse,

$$y^2 : Y^2 :: x'(2a+x') : X'(2a+X')$$

per l' iperbola, sopprimendo sempre nell' ultimo rapporto di ciascuna di queste proporzioni il fattor comune $\frac{p}{2a}$.

L' equazione della parabola $y^2=px'$ essendo trattata nella stessa maniera, dà solamente

$$y^2 : Y^2 :: x' : X',$$

il che fa vedere che *nella parabola i quadrati delle ordinate stanno come le ascisse corrispondenti.*

140. Segue dal paragone delle formule riportate nei num.[i] 120 e 128 che vi sono per ciascuna curva di secondo grado almeno due sistemi di coordinate, nei quali l' equazione di questa curva si presenta sotto la forma la più semplice: uno di questi sistemi è quello degli assi e l'altro quello de' due diametri coniugati; ed io vado a mostrare che v' è un numero infinito di sistemi di coordinate, i quali godono della medesima proprietà. Per far ciò, applicherò la trasformazione delle coordinate all'equazioni relative agli assi.

Sia primieramente quella dell'ellisse $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$,

la quale riducesi ad

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2,$$

osservo in primo luogo ch'è inutile di trasportar l'origine delle coordinate, la quale bisogna lasciare nel centro, e non avendo da cangiar che la direzione degli assi, prendo solamente

$$x = mt + pu,\ y = nt + qu\ (122).$$

Io lascio indeterminato l' angolo, che le nuove coordinate debbon fare trà loro, e di cui il coseno è rappresentato da h (123), e non terrò in conseguenza alcun conto dell'equazione

$$mp + nq + g(np + mq) = h;$$

non sarà lo stesso a riguardo dell' equazioni

$$m^2 + n^2 + 2gmn = 1,\ p^2 + q^2 + 2gpq = 1,$$

perchè le coordinate x e y essendo reciprocamente perpendicolari, ne resulta $g = 0$, di dove

$$m^2 + n^2 = 1,\ p^2 + q^2 = 1;$$

delle quattro quantità m, n, p e q non resteran dunque che due, delle quali sia possibile di disporre. Facendo la sostituzione de' valori di x e di y nell' equazione

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

otterremo

$$(a^2n^2 + b^2m^2)t^2 + 2(a^2nq + b^2mp)ut + (a^2q^2 + b^2p^2)u^2 = a^2b^2;$$

e, per semplicizzare quest' ultima, porrò

$$a^2nq + b^2mp = 0;$$

il che la riduce ad

$$(a^2n^2 + b^2m^2)t^2 + (a^2q^2 + b^2p^2)u^2 = a^2b^2.$$

Affin di paragonare quest' equazione con

$$a'^2t^2 + b'^2u^2 = a'^2b'^2$$

la porremo sotto la forma

$$\frac{a^2n^2 + b^2m^2}{a^2b^2}t^2 + \frac{a^2q^2 + b^2p^2}{a^2b^2}u^2 = 1,$$

$$\frac{t^2}{b'^2} + \frac{u'^2}{a'^2} = 1;$$

desse non potranno allor divenire identiche indipendentemente da t e da u se non che per la supposizione di

$$\frac{1}{b'^2}=\frac{a^2n^2+b^2m^2}{a^2b^2}, \qquad \frac{1}{a'^2}=\frac{a^2q^2+b^2p^2}{a^2b^2};$$

il che darà

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2n^2+b^2m^2}, \qquad a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2q^2+b^2p^2}.$$

Per assicurarsi della possibilità di questa trasformazione, fa di mestieri vedere se la determinazione delle quantità m, n, p e q sia soggetta a qualche eccezione. L'equazione

$$a^2nq+b^2mp=0,$$

posta sotto la forma

$$\frac{n}{m}\frac{q}{p}=-\frac{b^2}{a^2},$$

farà sempre conoscere il rapporto di p a q ovvero quello di m a n. Se si ricavi

$$\frac{q}{p}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n},$$

e se per abbreviare, si faccia

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n}=-r,$$

conseguiremo

$$q=pr;$$

sostituendo in $p^2+q^2=1$, ne dedurremo

$$p^2(1+r^2)=1,$$

di dove concluderemo

$$p=\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \qquad q=\frac{r}{\sqrt{1+r^2}};$$

espressioni, le quali resteran sempre *reali* qualunque sia r. L'equazione $m^2+n^2=1$ non potendo determinare che una delle due quantità m e n, lascia assolutamente indeterminato il rapporto $\frac{n}{m}$, il quale entra nell'espressioni di p e di q, che, per questa ragione, divengono suscettibili d'una

infinità di valori diversi. Esiste dunque difatto un' infinità di sistemi di coordinate, nei quali l'equazion dell'ellisse ha la forma

$$a'^2t^2 + b'^2u^2 = a'^2b'^2 ,$$

assolutamente simile a quella dell' equazione agli assi

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 .$$

141. Operando sull' equazion dell' iperbola

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) , \text{ ovvero } a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

com' io l' ho fatto su quella dell'ellisse, avrem successivamente

$$(a^2n^2 - b^2m^2)t^2 + 2(a^2nq - b^2mp)ut + (a^2q^2 - b^2p^2)u^2 = -a^2b^2 , \quad a^2nq - b^2mp = 0 ,$$

$$\frac{a^2n^2 - b^2m^2}{a^2b^2} t^2 + \frac{a^2q^2 - b^2p^2}{a^2b^2} u^2 = -1 ;$$

e paragonando l' ultima equazione a

$$\frac{t^2}{b'^2} - \frac{u^2}{a'^2} = -1 ,$$

troveremo

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2n^2 - b^2m^2} , \quad a'^2 = -\frac{a^2b^2}{a^2q^2 - b^2p^2} .$$

L'espressioni di p e di q saranno della medesima forma in questo caso come nel precedente, e potranno dare in conseguenza un'infinità di valori dopo quelli, che assegneremo al rapporto $\frac{n}{m}$; potremo dunque ricavar per l'iperbola una conclusione simile a quella, che abbiamo enunciata per l' ellisse.

142. Io passo alla parabola; la sua equazione $y^2 = 4c' x$ può essere trasformata in un' altra, la quale le sia simile, mediante le formule

$$x = mt + pu , \quad y = nt + qu .$$

S' ottiene infatti la resultante

$$n^2t^2 + 2nqut + q^2u^2 = 4c' (mt + pu) ,$$

dalla quale bisognerà far disparire i termini affetti da t^2, ut ed u, ciò che si effettuerebbe ponendo $n=0$, $p=0$; ma ne seguirebbe $m=1$, $q=1$, $x=t$, $y=u$, e si ricaderebbe sulle coordinate primitive: non succederà così variando nel medesimo tempo l'origine. Se si sostituiscono a x e ad y i loro valori i più generali

$$mt+pu+\alpha, \qquad nt+qu+\epsilon \; (122),$$

si ottiene allora

$$\left.\begin{array}{l} n^2t^2+2nqut+q^2u^2 \\ +2\epsilon(nt+qu)-4c'(mt+pu) \\ +\epsilon^2-4\alpha c' \end{array}\right\} = 0.$$

Potendo disporre adesso di quattro quantità a motivo delle due nuove indeterminate α e ϵ, e farem disparire i termini affetti da ut e da t, ed i termini indipendenti da t e da u ponendo

$$2nq=0,\quad 2\epsilon n-4c'm=0,\quad \epsilon^2-4\alpha c'=0.$$

La prima di queste equazioni può essere soddisfatta in due maniere tanto per $n=0$, quanto per $q=0$; ma $n=0$ dà $m=0$ nella seconda equazione, ciò, che non potrebbe accordarsi coll' equazione $m^2+n^2=1$. Adottando il valore $q=0$, il termine q^2u^2 svanisce; ed altro non resta che

$$n^2t^2=4c'pu \quad \text{ovvero} \quad t^2=\frac{4c'pu}{n^2};$$

equazione simile a quella, la quale rapportasi all'asse della curva. La supposizione di $q=0$, introdotta nell'equazione $p^2+q^2=1$, somministra

$$p=\pm 1;$$

da $2\epsilon n-4c'm=0$ ricavasi

$$\frac{n}{m}=\frac{2c'}{\epsilon};$$

e questa equazione, combinata con $m^2+n^2=1$, determina n e m. L'equazione $\epsilon^2-4\alpha c'=0$ determina pure α allorchè ϵ è cognito; ma quest'ultima quantità resta suscettibile di qualunque valor che vorremo.

143. Le osservazioni precedenti conducono a questo problema: *essendo dato un diametro qualunque, trovare la posizione del suo coniugato.* Lo risolveremo osservando che quando nella figura 50 del n.° 122 l'angolo CAB ov- Fig. 50.

vero quello, che fanno tra loro gli assi delle sue coordinate primitive x e y, è retto i triangoli $P''A'''R$ e $P''MQ$ divengono rettangoli, l' uno in R, l' altro in Q; dal che

ne segue che $m=\frac{A'''R}{A'''P''}$ rappresenta il coseno dell'angolo

$P''A'''R$, ovvero $B''A'''B'$ e $n=\frac{P''R}{A'''P''}$ n' è il seno; che

$p=\frac{P''Q}{P''M}$ rappresenta il coseno dell' angolo $MP''Q$, ovve-

ro $C''A'''B'$ e $q=\frac{QM}{P''M}$ n' è il seno.

Fig. 58 e 59. Se si riportano queste medesime denominazioni alle figure 58 e 59, prendo II' per l' asse delle x, OF per quello delle t ed OH per quello delle u, otterremo

$$\frac{n}{m}=\frac{\text{sen FOI}}{\text{cos FOI}}=\text{tang FOI},$$

$$\frac{q}{p}=\frac{\text{sen HOI}}{\text{cos HOI}}=\text{tang HOI};$$

e siccome l' equazioni

$$a^2nq+b^2mp=0,$$
$$a^2nq-b^2mp=0,$$

ottenute nei num.i 140 e 141, possono esser poste sotto la forma

$$\frac{n}{m}\frac{q}{p}=\mp\frac{b^2}{a^2},$$

ne resulterà

$$\text{tang FOI}.\text{tang HOI}=\pm\frac{b^2}{a^2},$$

il segno superiore riportandosi all'ellisse, e l' inferiore all' iperbola: determinerem dunque facilmente uno degli angoli FOI e HOI quando l' altro sarà cognito.

Fig. 58. 144. Si posson sostituir nell' ellisse, *fig.* 58, agli angoli FOI, HOI le coordinate de' punti F e H; poichè se si denotino

OE per α, EF per ϵ.
OG per α', GH per ϵ',

conseguiremo

$$\text{tang FOI} = \frac{\text{EF}}{\text{OE}} = \frac{\epsilon}{\alpha},$$

$$\text{tang HOI} = \frac{\text{GH}}{\text{OG}} = \frac{\epsilon'}{\alpha'},$$

ed in conseguenza

$$\frac{\alpha}{\epsilon}\frac{\epsilon'}{\alpha'} = -\frac{b^2}{a^2};$$

il che somministra

$$a^2\epsilon\epsilon' + b^2\alpha\alpha' = 0;$$

equazione, la quale unita con quella dell' ellisse

$$a^2\epsilon^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2$$

farà conoscere tanto α e ϵ, quanto α' e ϵ' vale a dire uno de' punti F, H quando l'altro sarà dato.

Nell' iperbola, *fig.* 59, α e ϵ non apparterranno più ad un punto della curva, poichè il diametro OF non l'attraversa; ma siccome non si tratta qui che della direzione di questo diametro, possiamo prendere in luogo del punto F il punto R corrispondente all'ascissa OI, e fare in conseguenza Fig. 59.

$$\alpha = \text{OI} = a, \qquad \epsilon = \text{IR};$$

il che darà

$$\text{tang FOI} = \frac{\epsilon}{a} \quad \text{e} \quad \frac{\epsilon}{a}\cdot\frac{\epsilon'}{\alpha'} = \frac{b^2}{a^2},$$

donde

$$a\epsilon\epsilon' - b^2\alpha' = 0.$$

Determinando ϵ col suo mezzo, questa equazione farà conoscere il punto R; bisognerà combinarla con

$$a^2\epsilon'^2 - b^2\alpha'^2 = -a^2b^2$$

se sarà il punto H quel, che si cerca.

145. Nella parabola si ha $q = 0$, segue da ciò che l'asse delle u, OH, *fig.* 60, è paralello a quello delle x, e che la posizione non dipende che dal punto O ov' esso Fig. 60.

incontra la curva. Questo punto si trova determinato dalla quantità a, che rappresenta evidentemente l'ascissa IG, la qual corrisponde, sull' asse IB, al punto della curva ove si ha nel tempo medesimo $t=0$, $u=0$; e l' equazione $\frac{n}{m}=\frac{2c'}{c}$ dà allora la tangente trigonometrica dell' angolo compreso tra l' asse delle t e quello delle u.

Farò osservar di passaggio che allor quando s'è trovata la posizion del diametro, il quale è il coniugato d'un diametro dato, si ha quella della tangente dalla curva al punto ov'essa incontra quest'ultimo; punto, il qual si può prendere arbitrariamente. Infatti (121), nell'ellisse e nell'iper-
Fig. 58 e 59. Fig. 60. bola, *fig.* 58 e 59, il diametro OF è paralello alla tangente HT; e nella parabola, *fig.* 60, questo diametro è egli stesso tangente alla curva in O.

Reciprocamente, quando si sa condur la tangente in un punto qualunque della curva, se ne conclude immediatamente la posizione del diametro coniugato.

146. Nell' equazioni

$$a'^2t^2+b'^2u^2=a'^2b'^2\ ,\quad a'^2t^2-b'^2u^2=-a'^2b'^2\ ,$$

di cui la prima appartiene all'ellisse, e la seconda all'iperbola, le rette a'^2 e b' rappresentano i due diametri coniugati: infatti, quando $t=0$, proviene

Fig. 58 e 59. $$u=a'\ \text{ovvero}\ OH=a',\ fig.\ 58\ e\ 59\ ;$$

ed allorchè $u=0$, proviene

$$t^2=b'^2,\ \text{ovvero}\ t^2=-b'^2\ ;$$

il che dà, per l' iperbola, come per l' ellisse,

$$OF=b'\ (128).$$

Egli è facil vedere che le quantità m, n, p e q possono, col mezzo dell' equazioni $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$, e di quelle, le quali resultano dall'espressioni di a'^2, e di b'^2, esser eliminate dall'equazione di condizione, la quale determina la posizion respettiva de' diametri coniugati, e che si debbe arrivare a una relazione tra queste linee, ed i semi-assi. Il calcolo s' effettua semplicissimamente nella maniera seguente.

Ricavansi immediatamente dall'espressioni di a'^2 e b'^2, relative all' ellisse (140), l' equazioni

$$a'^2a^2q^2+a'^2b^2p^2=a^2b^2,\quad b'^2a^2n^2+b'^2b^2m^2=a^2b^2;$$

ed unendovi respettivamente

$$q^2+p^2=1,\qquad n^2+m^2=1,$$

avremo due sistemi d'equazioni; uno in q^2 e p^2, l'altro in n^2 e m^2. Il primo sistema dà immediatamente

$$q^2=\frac{a^2b^2-a'^2b^2}{a'^2a^2-a'^2b^2}=\frac{b^2(a^2-a'^2)}{a'^2(a^2-b^2)},$$

$$p^2=\frac{a'^2a^2-a^2b^2}{a'^2a^2-a'^2b^2}=\frac{a^2(a'^2-b^2)}{a'^2(a^2-b^2)};$$

affin d'ottenere n^2, m^2, bisognerà cangiare a' in b' in questi valori, e proviene

$$n^2=\frac{b^2(a^2-b'^2)}{b'^2(a^2-b^2)},$$

$$m^2=\frac{a^2(b'^2-b^2)}{b'^2(a^2-b^2)}.$$

Ciò premesso, l'equazione di condizione (140)

$$a^2nq+b^2mp=0$$

riducesi ad

$$a^2nq=-b^2mp;$$

e quadrandola, s'ottiene

$$a^4n^2q^2=b^4m^2p^2.$$

Se si sostituiscano in quest'ultima i valori di n^2, m^2, p^2, q^2, potremo scancellare i denominatori, poichè dessi saranno i medesimi nei due membri; ed avremo

$$(a^2-a'^2)(a^2-b'^2)=(a'^2-b^2)(b'^2-b^2).$$

Sviluppando, riducendo e decomponendo in fattori, conseguiremo

$$(a^4-b^4)-(a^2-b^2)(a'^2+b'^2)=0;$$

indi sopprimendo il fattor comune a^2-b^2, troverem finalmente

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,\ \text{ovvero}\ \overline{OF}^2+\overline{OH}^2=\overline{OI}^2+\overline{OL}^2.$$

L'espressioni di a'^2 e di b'^2, relative all'iperbola (141), conducendo all' equazioni

$$a'^2a^2q^2 - a'^2b^2p^2 = -a^2b^2\ ;\ b'^2a^2n^2 - b'^2b^2m^2 = a^2b^2\,,$$

e l' equazione di condizione essendo

$$a^2nq - b^2mp = 0\,,$$

si fa manifesto che basterà render b^2 e b'^2 affetti del segno — nel calcolo precedente, per appropriarlo al caso attuale, e che ricaveremo in conseguenza

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2\,,\ \text{ovvero}\ \overline{OF}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{OI}^2 - \overline{OL}^2\,;$$

dunque *la somma de' quadrati de' semi-diametri coniugati nell' ellisse, ovvero la lor differenza nell' iperbola è eguale alla somma dei quadrati de' semi-assi, ovvero alla lor differenza.*

147. Se si moltiplichino tra di loro l'espressioni di a'^2 e di b'^2 nell' ellisse, otterremo

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^4n^2q^2 + a^2b^2n^2p^2 + a^2b^2m^2q^2 + b^4m^2p^2}\,;$$

ma quadrando l' equazione $a^2nq + b^2mp = 0$, si ottiene

$$a^4n^2q^2 + 2a^2b^2mnpq + b^4m^2p^2 = 0\,,$$

ovvero

$$a^4n^2q^2 + b^4m^2p^2 = -2a^2b^2mnpq\,;$$

e con questo valore farem disparire il primo e l' ultimo termine del denominatore dell' espressione di $a'^2b'^2$, la qual diverrà

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^2b^2n^2p^2 - 2a^2b^2mnpq + a^2b^2m^2q^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{(np - mq)^2}\,;$$

prendendo da ambe le parti la radice quadrata, avremo

$$a'b' = \frac{ab}{np - mq}\,,\ \text{ovvero}\ a'b'(np - mq) = ab.$$

Egli è importante osservare che la quantità $np - mq$ non è altra cosa che il seno dell'angolo, che fanno tra loro i due diametri coniugati OF ed OH, *fig.* 58, poichè n Fig. 58. e m essendo il seno e il coseno dell' angolo FOI, q e p il seno e il coseno dell'angolo HOI, la formula

$$\text{sen FOH} = \text{sen (FOI} + \text{HOI)}$$

$$= \text{sen FOI cos HOI} + \text{cos FOI sen HOI} \quad (11)$$

somministra

$$\text{sen FOH} = np - mq,$$

se si fa attenzione che l'angolo HOI cadendo al disotto del-l' asse H' ha un seno *negativo* $q = -\frac{b^2mp}{a^2n}$, il quale bisogna render *positivo* in questa formula e prender in conseguenza $-q$ in luogo di $+q$; avrem dunque

$$a'b' \text{ sen FOH} = ab.$$

Egli è facil vedere che, se dal punto F si abbassi sopra OH la perpendicolare FQ, avremo

$$\text{FQ} = \text{OF sen FOH} = b' \text{ sen FOH};$$

e che in conseguenza l' area del parallelogrammo

$$\text{FH} = \text{OH} \times \text{FQ} = a'b' \text{ sen FOH};$$

si dee dunque concluder da ciò, che precede, che il rettàngolo formato sopra i semi-assi a e b, ovvero OI ed OL, è eguale al parallelogrammo FH formato sui due semi-diametri coniugati OF ed OH.

Riconosceremo che la medesima proprietà ha luogo nel-l' iperbola formando nello stesso modo il prodotto $a'^2b'^2$; ma bisognerà aver riguardo che nella figura 59 l' angolo Fig. 59.

$$\text{FOH} = \text{FOI} - \text{HOI}.$$

Deducendosi da ciò questa proprietà notabile che *i parallelogrammi circoscritti all' ellisse, ovvero iscritti tra le due parti opposte dell'iperbola son tutti eguali al rettangolo degli assi;* poichè questi parallelogrammi, così come lo dimostrano le figure, son composti di quattro altri parallelogrammi, eguali ciascuno al quarto del rettangolo degli assi, espresso da $4ab$.

148. Se si denoti per s il seno dell'angolo FOH, avrem l'equazione

$$a'b's = ab,$$

la quale combineremo con

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

nell'ellisse, e con

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$$

nell'iperbola, affin di trovare i semi-assi a e b allorchè non conosceremo che due semi-diametri coniugati e l'angolo, ch'essi fanno tra loro. Quando avremo gli assi arriverem facilmente agli angoli, ch'essi fanno coi diametri coniugati; servendoci dell'espressioni di q^2, p^2, m^2, n^2 riportate nel n.° 146. Queste espressioni danno

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{b^2(a^2 - a'^2)}{a^2(a'^2 - b^2)}, \frac{n^2}{m^2} = \frac{b^2(a^2 - b'^2)}{a^2(b'^2 - a^2)};$$

e per l'estrazione della radice quadrata arrivasi alle tangenti degli angoli HOI, FOI.

Un'osservazione, la quale presentasi facilmente, e ch'io non debb'omettere, è quella che vi sono in un'ellisse qualunque due diametri coniugati eguali tra loro. Infatti, se nell'equazioni

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2, \quad a'b's = ab$$

si suppone $a'=b'$, ricavansi i valori

$$a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad s = \frac{ab}{a'^2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

i quali fanno conoscere la grandezza di questi diametri e l'angolo, ch'essi comprendon tra loro. La supposizione di $a'=b'$ nei valori di q^2, p^2, n^2 e m^2 rende eguali il primo ed il terzo, il secondo ed il quarto; abbiam dunque tutto ciò, che bisogna onde determinare, per rapporto agli assi, la posizione di questi diametri.

Allorchè vi si riporta l'equazione dell'ellisse dessa prende la forma

$$t^2 + u^2 = a'^2,$$

e divien simile a quella del circolo; la sola differenza, che sussiste, è l'obliquità delle coordinate t ed u; così

possiamo costruir quest' ellisse inclinando le ordinate del circolo sotto l' angolo, che fanno i diametri, di cui parlo; da ciò resulta un metodo assai semplice di descrivere un'ellisse per punti allorchè si conoscono i suoi diametri coniugati eguali.

Lascerò al lettore la cura d' effettuare le costruzioni dell' espressioni riportate qui sopra. Ciò, che io n'ho detto, mi sembra soddisfare al fine che m' era proposto, cioè di far vedere come si possan dedurre le principali proprietà delle linee di secondo grado con un metodo veramente analitico ed indipendente dalle costruzioni geometriche.

149. Ma non è solamente riportandole a un asse delle ascisse con ordinate paralelle tra loro, come lo abbiam veduto sin qui, che le curve posson essere definite per via d'equazioni; è a proposito l'osservare che qualunque sistema di linee proprio a determinare i differenti punti d' una curva può egualmente somministrarne un' equazione caratteristica.

La relazione

$$z=\frac{a^2-cx}{a}=a-\frac{cx}{a},$$

ottenuta nel n.° 130 tra il raggio vettore FM$=z$, *fig.* 52, e l' ascissa OP$=x$, può esser considerata come tale per rapporto all' ellisse. Se ne deduce una costruzion semplicissima di questa curva; poichè dandosi x, otterremo, con linee proporzionali, la quantità $\frac{cx}{a}$; e togliendo questa quantità da a, avremo z ovvero FM; in seguito dal punto F, come centro e con un raggio eguale a FM, descriveremo un arco di circolo, il quale taglierà la perpendicolare PM in un punto M appartenente all' ellisse. Se l' ascissa cadesse nella parte OP' dell' asse, x divenendo negativa, verrebbe per questo caso $z=a+\frac{cx}{a}$. Fig. 52.

Questa equazione differisce dalle precedenti in ciò che l' ordinata, in luogo d' esser costantemente paralella a una medesima retta, cangia sempre di direzione e non è obbligata che a passar per un punto dato; così l' equazione $z=a-\frac{cx}{a}$, benchè di primo grado, non appartiene altrimenti

ad una linea retta, come quando le sue coordinate sono respettivamente paralelle ad assi fissi.

Nel sistema, ch'io adesso considero, egli è assai naturale di por l'origine dell'ascisse nel punto F, dal quale partono le nuove ordinate, ovvero i raggi vettori, e di far rimpiazzare in conseguenza $OP = x$ da $FP = x'$; il che somministra

$$x \text{ ovvero } OP = OF - FP = c - x',$$

e $$z = a - \frac{c(c - x')}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} + \frac{cx'}{a};$$

ponendo b^2 in luogo di $a^2 - c^2$, avremo

$$z = \frac{b^2 + cx'}{a}.$$

Finalmente il più spesso s'introduce l'angolo IFM in luogo dell'ascissa x'; il che si fa osservando che nel triangolo rettangolo FMP si ha
$FP = FM \cos PFM$, di dove $x = -z \cos IFM$ (23); chiamando dunque φ l'angolo IFM, otterremo

$$z = \frac{b^2 - cz \cos \varphi}{a} \text{ ovvero } z = \frac{b^2}{a + c \cos \varphi}.$$

Quest'ultima equazione è d'un grand'uso nell'applicazion dell'analisi all'Astronomia: dessa si chiama *equazione polare*, come tutte quelle, di cui le ordinate partono da un medesimo punto, il quale si chiama il *polo della curva*.

L'equazione $z = \dfrac{cx - a^2}{a}$ relativa all'iperbola (132), essendo sottomessa alle trasformazioni precedenti, divien successivamente

$$z = \frac{c^2 - a^2 - cx'}{a} = \frac{b^2 - cx'}{a},$$

$$z = \frac{b^2 - cz \cos \varphi}{a} \text{ ovvero } z = \frac{b^2}{a + c \cos \varphi}.$$

Fig. 54. Nella parabola, facendo $FM = z$, *fig.* 54, a motivo che $FM = QM$ (134), si ha

$$z = c' + x;$$

ma x rappresentando IP, proviene;

$$x = \text{IF} - \text{FP} = c' - x',$$

d'onde
$$z = 2c' - x',$$

$$z = 2c' - z \cos\varphi \text{ ovvero } z = \frac{2c'}{1 + \cos\varphi}.$$

150. Le tre equazioni *polari* ottenute di sopra possono collegarsi tra loro introducendo nelle due prime, in luogo del secondo asse b, il parametro, dietro il quale si ha $b^2 = \frac{1}{2}ap$ (137). Mediante questa sostituzione l'equazion dell'ellisse cangiando in

$$z = \frac{\frac{1}{2}ap}{a + c\cos\varphi} = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \frac{c}{a}\cos\varphi},$$

diviene quella dell'iperbola quando a è negativo e $c > a$ (*), quella della parabola, quando si fa $c = a$ ed a infinita; caso, in cui $p = 4c'$.

Si può far ancora $\frac{c}{a} = e$; il che darà

$$p = 2a(1 - e^2), \quad z = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi}.$$

Sotto questa forma, avrem l'ellisse quando $e < 1$, il circolo se $e = 0$; l'iperbola se $e > 1$ e che a sia negativa; la parabola se $e = 1$ ed a sia infinita.

Finalmente, se si volesse eliminare a dal resultato precedente, e rimpiazzarla colla distanza dal vertice al fuoco impiegheremo la relazione $c = a - c'$ (137), la qual somministra

---

(*) φ *debb' essere preso allora pel supplemento di IFM*, fig. 53.

$$ae = a - c', \text{ donde } a = \frac{c'}{1 - e},$$

e $$z = \frac{c'(1 + e)}{1 + e \cos \varphi}.$$

151. Le proprietà fondamentali dell' ellisse, dell'iperbola e della parobola enunciate nel n.° 139, e che hanno luogo tanto per rapporto agli assi, quanto per rapporto ai diametri, si trovano nelle differenti curve, le quali resultano dall' intersezione della superficie conica con un piano qualunque. Eccone le dimostrazioni sintetiche.

Fig. 61. Sia ASB, *fig.* 61, un cono qualunque a base circolare, vale a dire un corpo terminato dalla superficie, che genera strisciando sulla circonferenza del circolo ACBD una retta obbligata a passare pel punto S in tutte le posizioni, che essa prenda. 1.° Egli è manifesto che, se si tagli questo cono con un piano qualunque CSD, condotto pel suo *vertice* S, otterremo due linee rette, le quali corrispondono alle due posizioni prese dalla retta generatrice allorchè dessa è pervenuta successivamente ai punti C e D, nei quali il piano CSD incontra la circonferenza ACBD. 2.° Se il piano secante è A′C′B′D′ paralello al pian della base ACBD, la sezione sarà un circolo, così com' egli è facile di convincersene concependo che siasi condotto pel punto S e pel centro della base l'*asse* SO del cono proposto, e che siansi fatti passar per quest' asse due piani qualunque ASB e CSD, di cui le intersezioni respettive con ACBD, A′C′B′D′ sieno AB ed A′B′, CD e C′D′; poichè avremo allora i triangoli simili

$$COS, \; C'O'S,$$

i quali daranno

$$CO : C'O' :: SO : SO',$$

ed i triangoli simili AOS, A′O′S, i quali daranno

$$AO : A'O' :: SO : SO',$$

e poichè per costruzione AO=CO, avremo

$$A'O' = C'O';$$

il che dimostra che tutti i raggi della sezione A′C′B′D′ sono eguali, e ch' essa è in conseguenza un circolo.

Egli è a proposito d'osservare che la superficie del cono s'estende indefinitamente tanto al disotto del pian della base ACBD, quanto al disopra del suo vertice S, poichè nulla limita la lunghezza della retta generatrice; ed è facil comprendere che la parte Sb del prolungamento della retta SB descrive un secondo cono, collocato in una situazione inversa del primo.

152. Essendo poste queste premesse, si concepisca che il piano secante non sia altrimenti parallello alla base ACBD del cono, ma ch'esso incontri questa base a seconda d'una retta GH, *fig.* 62; abbasso su questa linea dal centro O la perpendicolare OG, per la quale io fo passare il piano triangolare ASB. Egli è manifesto che, se il piano secante incontri nel medesimo tempo i due lati SA e SB, e che in conseguenza desso non entri punto nel cono superiore aSb; la sezione IMI$'m$ sarà una curva chiusa, ovvero rientrante in sè stessa. Fig. 62.

Ciò presupposto, conduco paralellamente ad ACBD due piani EMFm, E$'$M$'$F$'m'$, i quali incontreranno nel medesimo tempo il piano secante IMI$'m$: le comuni sezioni dei due primi col terzo, rappresentate da Mm, M$'m'$, saranno paralelle a GH, ed in conseguenza perpendicolari alle linee EF ed E$'$F$'$, le quali son paralelle tra loro, come essendo le comuni sezioni de' piani EMFm, E$'$M$'$F$'m'$ col piano ASB. Le curve EMFm e E$'$M$'$F$'m'$ essendo circonferenze di circolo (n.° preced.), avremo

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP}\times\overline{FP},\quad \overline{P'M'}^2 = \overline{E'P'}\times\overline{F'P'};$$

ma la linea II$'$, comune sezione de' piani ASB ed IMI$'m$, formando colle linee EF, E$'$F$'$ e coi lati del cono i triangoli EIP, E$'$IP$'$ simili tra loro, ed i triangoli FI$'$P, F$'$I$'$P$'$ parimente simili tra loro, i due primi daranno

$$EP : E'P' :: IP : IP',$$

e gli altri due

$$FP : F'P' :: I'P : I'P';$$

moltiplicando queste proporzioni per ordine, avremo

$$\overline{EP}\times\overline{FP} : \overline{E'P'}\times\overline{F'P'} :: \overline{IP}\times\overline{I'P} : \overline{IP'}\times\overline{I'P'};$$

e sostituendo ad $\overline{EP}\times\overline{FP}$ ed $\overline{E'P'}\times\overline{F'P'}$ i loro valori $\overline{PM}^2$ e $\overline{P'M'}^2$, otterremo

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: \overline{IP} \times \overline{I'P} : \overline{IP'} \times \overline{I'P'};$$

proporzione, la quale esprime la proprietà caratteristica dell' ellisse enunciata nel n.° 139.

153. È a proposito l'osservare che, se il triangolo SII' fosse simile al triangolo SAB senza che la linea II' fosse paralella ad AB', il che avrebbe luogo se l'angolo SII' fosse eguale a SAB, allora SI'I lo sarebbe a SBA, i triangoli EPI, FI'P divenendo pur simili tra loro, come i precedenti, darebbero

$$EF : I'P :: IP : FP, \text{ ovvero } \overline{EP} \times \overline{FP} = \overline{I'P} \times \overline{IP};$$

e perchè nel circolo EMFm si ha

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP} \times \overline{FP};$$

avrebbesi pure

$$\overline{PM}^2 = \overline{I'P} \times \overline{IP}.$$

La sezione IMI'm sarebbe dunque essa stessa un circolo in questo caso se le ordinate PM fossero perpendicolari al diametro II'; ma affinchè quest' ultima condizione sia soddisfatta, fa di mestieri che la comune sezione GH del piano secante e della base del cono sia perpendicolare ad un tempo sulla retta GA e sulla retta GI, vale a dire ch' essa sia perpendicolare al pian del triangolo SAB condotto per l'asse, e che in conseguenza quest' ultimo sia esso pure perpendicolare al pian della base del cono ed al piano secante. Allorchè queste circostanze si verificheranno insieme il piano secante è detto *antiparalello* a quel della base; e ne resulta che in un cono a base circolare la sezione *antiparalella* a questa base è un circolo, nello stesso modo che la sezion *paralella*.

154. Se il piano secante fosse, per rapporto ai lati del
Fig.63. cono, nella situazione, che rappresenta la figura 63, vale a dire ch' esso potesse incontrare nel medesimo tempo i due coni opposti, desso formerebbe in ciascun cono una curva indefinita; poichè una volta entrato nel cono questo piano non potrebbe più esserne liberato. I due coni opposti non formando, a parlar propriamente, che una sola superficie, le due curve KIk e K'I'k' debbon essere riguardate come non componendone che una sola. Egli è facile di riconoscer digià una rassomiglianza distinta tra questa curva e l'iperbola; ma, per dimostrare la loro identità, bisogna di più

ritrovar nella prima una delle proprietà caratteristiche della seconda. Supponendo che il piano ASB sia determinato come nel n.° 152, che siasi condotto il piano EMFm parallello ad ACBD, e tirate le rette II, Mm, M$'m'$, le quali sono le comuni sezioni del piano secante coi tre piani ASB, EMFm, ACBD, paragoneremo i triangoli EIP, AIP$'$, i quali daranno

$$EP : AP' :: IP : IP',$$

ed i triangoli simili FI$'$P, BI$'$P$'$, i quali daranno

$$FP : BP' :: I'P : I'P';$$

moltiplicando queste due proporzioni per ordine, conseguiremo

$$\overline{EP}\times\overline{FP} : \overline{AP'}\times\overline{BP'} :: \overline{IP}\times\overline{I'P} : \overline{IP'}\times\overline{I'P'};$$

ma, a motivo che le sezioni EMFm ed ACBD sono circoli, di cui i diametri EF ed AB son perpendicolari alle rette Mm e M$'m'$ per costruzione, avremo

$$\overline{EP}\times\overline{FP}=\overline{PM}^2, \quad \overline{AP'}\times\overline{BP'}=\overline{P'M'}^2,$$

ed in conseguenza

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: \overline{IP}\times\overline{I'P} : \overline{IP'}\times\overline{I'P'};$$

proporzione, nella quale si trova espressa la proprietà caratteristica dell' iperbola enunciata nel n.° 139.

155. Mi resta ancora ad esaminare il caso ove il piano secante fosse paralello ad uno de' lati del cono, come lo mostra la figura 64. Esso non potrebbe allora incontrare che un solo de' due coni opposti; ma quello non se ne libererebbe giammai, di manierachè la sezione MIm sarebbe una curva aperta ed infinita come la parabola, alla quale io vado a dimostrar ch'ell'è identica. I piani ASB, EMFm, ACBD essendo condotti nelle medesime condizioni che sopra, il parallelismo delle linee IP$'$ e SB somministra Fig. 64.

$$FP=BP';$$

da un altro lato i triangoli EIP, AIP$'$ essendo simili, conducono a

$$EP : AP' :: IP : IP';$$

moltiplicando l'uno de' termini del primo rapporto per FP,

l' altro per BP', conseguiremo

$$\overline{EP}\times\overline{FP} : \overline{AP'}\times\overline{BP'} :: IP : IP';$$

ma nei circoli EMF*m* ed ACBD si ha sempre

$$\overline{PM}^2 = \overline{EP}\times\overline{FP},\ \ \overline{P'M'}^2 = \overline{AP'}\times\overline{BP'};$$

avrem dunque

$$\overline{PM}^2 : \overline{P'M'}^2 :: IP : IP';$$

proporzione, la quale non è che l' espressione della proprietà caratteristica della parabola enunciata nel n.° 139.

156. Le circostanze, nelle quali le linee del secondo grado cangiano di natura, posson vedersi pure nel cono. Infatti, se il piano secante passa pel vertice senz' entrare nel cono, la sezione si riduce ed un punto, il qual corrisponde a quello, che abbiamo notato nel n.° 116.

Quando il piano secante, passando sempre pel vertice, entra nel cono, si hanno due linee rette; e se si allontani in seguito il piano secante dal vertice del cono facendo muovere questo piano parallelamente a sè stesso, otterremo una serie d'iperbole aventi per *asintoti* le linee rette suddette, riportate, ovvero *proiettate* sul pian della curva con perpendicolari a questo piano (118 e 128).

Finalmente, quando il piano secante è parallelo al lato del cono, se desso passa pel vertice, egli non fa altro che toccare il cono a seconda d'una linea retta, ma che si dee riguardar come doppia; poichè dessa è la riunione delle due parti della parabola, le quali s' approssiman quanto mai, atteso il ristringimento che questa curva subisce a misura che il piano secante s'approssima al suo contatto col cono (119 e 128).

Da un'altra parte più si allontana dal vertice del cono, ma sempre parallelamente al suo lato, il piano secante, più la parabola s' apre, ovvero si slarga verso il suo vertice, e tende in conseguenza ad avvicinarsi alla linea alzata da questo punto perpendicolarmente al suo asse.

157. Vado ad esaminare le proprietà delle linee rette, le quali tagliano, ovvero toccano le curve di secondo grado. Affin di seguire il metodo, che ho impiegato a riguardo del circolo in particolare (105), prenderem l'equazione

$$y - c = A(x - a),$$

la quale appartiene alla retta, che passa pel punto, di cui le coordinate sono α e ϵ, e faciente coll' asse delle ascisse un angolo, la cui tangente trigonometrica è A; la combineremo coll'equazione $y^2 = mx + nx^2$; la quale rientra in $A't'^2 + C'u'^2 - E'u' = 0$ (128) e comprende in conseguenza le tre curve di secondo grado. Facendo, come nel n.° 105,

$$z = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\epsilon)^2},$$

avremo

$$x = \alpha + \frac{z}{\sqrt{1+A^2}},\ y = \epsilon + \frac{Az}{\sqrt{1+A^2}};$$

e ponendo, per abbreviare, $\frac{1}{\sqrt{1+A^2}} = A'$, conseguiremo

$$x = \alpha + A'z,\ y = \epsilon + A'Az;$$

sostituendo questi valori nell' equazione $y = mx + nx^2$, otterremo la trasformata seguente

$$\epsilon^2 + 2\epsilon AA'z + A^2A'^2z^2 = \begin{cases} m\alpha + mA'z \\ + n\alpha^2 + 2nA'\alpha z + nA'^2z^2. \end{cases}$$

Passando tutti i termini in un sol membro ed ordinandolo per rapporto a z, troveremo

$$(A^2 - n)A'^2z^2 + (\epsilon A - \tfrac{1}{2}m - n\alpha)\, 2A'z + \epsilon^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0;$$

il che riducesi a

$$z^2 + \frac{2(\epsilon A - \frac{1}{2}m - n\alpha)}{(A^2-n)\,A'}\, z + \frac{\epsilon^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2-n)\,A'^2} = 0.$$

In questa equazione l' incognita z rappresenta la distanza EM, *fig.* 65, tra il punto dato E ed uno de' punti d' intersezioni M e M' della retta proposta EM con la curva AC; col mezzo del suo valore arriverem facilmente a quelli delle coordinate di queste intersezioni. *Fig.65.*

Egli è manifesto da ciò, che precede, che una *linea retta non può incontrare in più di due punti una curva di secondo grado.*

158. Ragionando qui come pel caso del circolo (107),

vedremo che i due valori di z debbono divenire eguali allorchè la linea proposta altro non fa che toccare la curva, come in N; perchè i punti M e M' si ravvicinano di più in più a misura che la linea EM si approssima ad EN. La differenza de' due valori di z compresa nella formula

$$z = -\frac{cA - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'} \pm \sqrt{\left(\frac{cA - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{c^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2}}$$

essendo espressa da

$$2\sqrt{\left(\frac{cA - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{c^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'^2}},$$

e dando sempre la lunghezza della corda MM', divien nulla allorchè i punti M e M' coincidono, e somministra in conseguenza, pel punto di *contatto* N, l' equazione

$$\left(\frac{cA - \frac{1}{2}m - n\alpha}{(A^2 - n)A'}\right)^2 - \frac{c^2 - m\alpha - n\alpha^2}{(A^2 - n)A'} = 0 \ (1).$$

Sviluppandola A'^2 sparirà come divisor comune a tutti i termini, e la resultante sarà l'equazione, la quale dee dare A, e farà conoscere in conseguenza la posizione della retta EN condotta pel punto E *tangenzialmente* alla curva AC.

Non volendo considerare che i casi i più semplici, supporrò che il punto E sia preso sull'asse delle ascisse AP,
Fig.66. *fig.* 66; resulterà da ciò $c = 0$, e

$$\frac{(\frac{1}{2}m + n\alpha)^2}{(A^2 - n)^2} + \frac{m\alpha + n\alpha^2}{A^2 - n} = 0;$$

equazione, la quale riducesi dopo lo sviluppo a

$$\frac{1}{4}m^2 + m\alpha A^2 + n\alpha^2 A^2 = 0,$$

e somministra

$$A = \frac{\frac{1}{2}m}{\sqrt{-m\alpha - n\alpha^2}}.$$

Questa espressione presentasi sotto una forma *immaginaria*; ma essa può divenir *reale* col mezzo dei valori particolari, che riceveranno le quantità m, n ed α; e ciò succede per tutti i casi ove la posizione del punto E e la natura della curva permettono di condurle una tangente da questo punto.

159. V' è ancora un caso, nel quale la condizion di *contatto* si semplicizza molto; questo è quello ove il punto dato essendo sulla curva medesima, si confondono col punto medesimo di contatto. Infatti, se il punto E passa in M, *fig.* 65, vi sarà allora tra α e ε la medesima relazione che Fig.65.
tra x e y sulla curva AC, vale a dire che

$$\varepsilon^2 = m\alpha + n\alpha^2, \text{ ovvero } \varepsilon^2 - m\alpha - n\alpha^2 = 0;$$

ciò, che ridurrà l' equazione (1) alla seguente,

$$\varepsilon A - \frac{1}{2}m - n\alpha = 0,$$

di dove ricaveremo $$A = \frac{\frac{1}{2}m + n\alpha}{\varepsilon}.$$

Tal è l' espressione della tangente dell' angolo, che dee fare coll' asse delle ascisse la retta TM affin di toccare la curva AC.

La posizione di questa retta sarebbe data in una maniera più comoda mentre se ne conosce un secondo punto; e quello, che si offre più naturalmente, si è il punto T ove dessa incontra l' asse delle ascisse, e pel quale $y=0$ nell' equazione $y-\varepsilon=A(x-\alpha)$ (85). Resulta da ciò

$$-\varepsilon = A(x-\alpha), \text{ e } x-\alpha = -\frac{\varepsilon}{A};$$

la quantità $x-\alpha$ essendo la differenza delle ascisse de' punti M e T, denota la porzione PT dell' asse AB: ponendo dunque per A il suo valore, avremo

$$PT = -\frac{\mathfrak{c}^2}{\frac{1}{2}m + n\alpha} \text{ (*)}.$$

La linea PT si chiama la *suttangente*; ed allorchè essa è costrutta, si ottien la tangente unendo il punto M ed il punto T con una retta.

160. Affin di conoscere l'espressione della suttangente per ciascuna delle curve di secondo grado in particolare, basta paragonar successivamente l'equazioni

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2,\ y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2, y^2 = px$$

coll'equazione $y^2 = mx + nx^2$. Osservando come qui sopra, che α e $\mathfrak{c}$, denotanti le coordinate del punto di contatto situato sulla curva, hanno tra loro le medesime relazioni che x e y, e sostituendo in conseguenza per $\mathfrak{c}^2$ il suo valore, troveremo, per la prima equazione appartenente all'ellisse,

$$m = p, n = -\frac{p}{2a},$$

donde $$PT = -\frac{2a\mathfrak{c}^2}{p(a-\alpha)} = -\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a-\alpha};$$

per la seconda equazione appartenente all'iperbola,

$$m = p,\ n = \frac{p}{2a},$$

donde $$PT = -\frac{2a\mathfrak{c}^2}{p(a+\alpha)} = -\frac{2a\alpha + \alpha^2}{a+\alpha};$$

per la terza finalmente appartenente alla parabola,

$$m = p, n = 0, \text{ donde } PT = -\frac{2\mathfrak{c}^2}{p} = -2\alpha.$$

(*) *Nella figura PT è la somma delle linee AT ed AP, perchè l'ascissa AT del punto T è negativa per rapporto all'ascissa AP del punto M (76).*

Quest' ultima espressione, la più semplice delle tre, fa vedere che *nella parabola la suttangente è doppia dell' ascissa.* Il segno —, dal quale essa è affetta, nello stesso modo che l'altre, fa vedere ch'essa debb'essere presa sull' asse AB a partire dal punto P verso del lato ove si portano le x negative; ma siccome la forma delle curve indica sufficientemente da qual lato, dee cadere la suttangente, io farò d'ora in avanti astrazione dal segno della sua espressione.

La costruzione delle due prime espressioni non offre molto maggiore difficoltà: si ha per l'ellisse

$$a - \alpha : 2a - \alpha :: \alpha : \frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha} = \text{PT},$$

per l'iperbola

$$a + \alpha : 2a + \alpha :: \alpha : \frac{2a\alpha + \alpha^2}{a + \alpha} = \text{PT};$$

così il tutto riducesi a trovar delle quarte proporzionali.

È cosa ben notabile che il secondo asse b non entra punto in queste espressioni; ne resulta che, per una medesima ascissa, la *suttangente* è la medesima in tutte l'ellissi, le quali hanno il medesimo grand' asse, e che altrettanto succede a riguardo dell' iperbole. L'ellisse si cangia in circolo allorchè $b=a$; si può condur la tangente alla prima di queste curve col mezzo di quella della seconda; poichè, se si prolunghi l'ordinata pm, *fig.* 56, fino all' incontro del circolo descritto sul grand' asse, e si tiri la retta nT tangente a quest' ultimo nel punto n, la suttangente pT converrà pure, dietro a ciò, che precede al punto m dell' ellisse, la cui tangente s' otterrà in conseguenza unendo il punto S col punto m. Avrebbesi una costruzione simile per l'iperbola qualunque partendo dalle suttangenti dell' iperbola *equilatera* (128). Fig. 56.

161. Quando si ha la suttangente egli è facile di dedurne l'espressione della *tangente*, della *sunnormale* e della *normale*: questi sono i nomi, che si danno alle linee DM, PM e MR, *fig.* 65. La prima è la porzione della tangente compresa tra il punto di contatto e l'asse dell' ascisse; la seconda è la parte dell' asse delle ascisse compresa tra il piede dell' ordinata PM ed il punto R ove una retta condotta perpendicolarmente alla tangente pel punto M incontra quest' asse; finalmente la terza è la lunghezza medesima di questa perpendicolare misurata dal punto M sino all' asse delle ascisse. Fig. 65.

1.° Pel triangolo TMP, rettangolo in P, si ha

$$MT = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PT}^2}.$$

2.° I triangoli PMT, PMR simili tra loro, come essendo formati dalla perpendicolare PM abbassata dall' angolo retto del triangolo TMR rettangolo in M, daranno

$$PT : PM :: PM : PR, \text{ di dove } PR = \frac{\overline{PM}^2}{PT}.$$

3.° Resulta dal triangolo MPR, rettangolo in P,

$$MR = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PR}^2}.$$

Egli è manifesto che queste formule convengono a tutte le curve, e che affin d' applicarle all' ellissi, per esempio, fa di mestieri por nella prima e nella seconda, in luogo di PM e di PT, i valori relativi a questa curva; indi col valor, che otterremo per PR e coll' altro di PM formeremo quello di MR: bisognerà operar nella stessa maniera per rapporto all' iperbola ed alla parabola. Io mi limiterò a riportar qui i resultati di queste sostituzioni, le quali non hanno per loro stesse alcuna difficoltà. Per l' ellisse

$$PT = \frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}, MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \left(\frac{2a\alpha - \alpha^2}{a - \alpha}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}(a - \alpha), MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha - \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(a - \alpha)^2}$$

per l' iperbola

$$PT = \frac{2a\alpha + \alpha^2}{a + \alpha}, MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha + \alpha^2) \left(\frac{2a\alpha + \alpha^2}{a + \alpha}\right)^2}$$

$$PM = \frac{b^2}{a^2}(a + \alpha), MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(2a\alpha + \alpha^2) + \frac{b^4}{a^4}(a + \alpha)^2}$$

per la parabola

$$PT = 2\alpha, \quad MT = \sqrt{p\alpha + 4\alpha^2},$$

$$PR = \frac{1}{2}p, \quad MR = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}.$$

Si ottengono de' resultati un poco più semplici a riguardo delle due prime curve allorchè si contan le ascisse a partir dal centro; cosa, che non può farsi a riguardo della terza, la quale n'è priva (128). Affin d'arrivare a questi resultati, bisogna fare $x = a - x'$ nell'ellisse, e $x = x' - a$ nell'iperbola (137); x' sarà la nuova ascissa presa a partirsi dal centro: queste sostituzioni e le riduzioni, che ne seguono, essendo effettuate, conseguirem per l'ellisse

$$PT = \frac{a^2 - x'^2}{x'}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) + \left(\frac{a^2 - x'^2}{x'}\right)^2}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}x', \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x'^2) + \frac{b^4}{a^4}x'^2}$$

per l'iperbola

$$PT = \frac{x'^2 - a^2}{x'}, \quad MT = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2) + \left(\frac{x'^2 - a^2}{x'}\right)}$$

$$PR = \frac{b^2}{a^2}x', \quad MR = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x'^2 - a^2) + \frac{b^4}{a^4}x'^2}$$

162. Per quanto elegante debba comparire il metodo qui sopra impiegato per condur le tangenti alle curve di secondo grado, credo non dover passare sotto silenzio le soluzioni sintetiche, che gli antichi hanno date di questo problema, ed io vado ad esporle succintamente.

1.° Pel punto M preso sull'ellisse, *fig.* 52, condurremo i due raggi vettori FM e F'M; prolungheremo l'uno de' due, per esempio F'M d'una quantità MG eguale a FM; tireremo in seguito FG; e la retta MH, perpendicolare sul mezzo di FG, sarà tangente nel punto M; poichè dessa non avrà che questo punto di comune colla curva. Infatti, se si prenda un altro punto qualunque N su questa retta, e si tirin le rette FN, F'N, avremo Fig. 52.

$$F'N + NG > F'G;$$

il che riducesi a

$$F'N + FN > F'M + FM > II',$$

poichè, mediante la costruzione, $MG = FM$, $NG = FN$; e siccome egli è facil vedere che, pei punti posti al didentro dell'ellisse, la somma delle distanze di ciascun punto dai fuochi è minor del grand'asse, segue da ciò, che precede, che il punto N è fuor dell'ellisse, perchè la somma de' suoi raggi vettori è maggiore dell'asse II'.

Questa costruzione dimostra pure che gli angoli FMH, F'MN formati dai raggi vettori e dalla tangente, sono eguali, e che la normale condotta dal punto M dividerebbe in due parti eguali l'angolo FMF'.

Fig.53. 2.° Allorchè il punto proposto è sull'iperbola, *fig.* 53, fa di mestieri portare il più piccol raggio vettore FM sul più grande F'M, e non sul suo prolungamento: terminando la costruzione, come qui sopra, avremo per questo caso

$$F'N < F'G + NG < F'G + FN,$$

donde ne segue

$$F'N - FN < F'G < F'M - FM;$$

il che dimostra che il punto N non è sull'iperbola. Desso non è posto nell'interno di questa curva; poichè bisognerebbe, perchè ciò succedesse, che la differenza delle distanze da ciascuno de' fuochi sorpassasse il grand'asse. Infatti, se si tiri $F'm$, si ha

$$F'm - Fm = F'm + Mm - FM;$$

e siccome $F'm + Mm$ sorpassa F'M, ne segue

$$F'm - Fm > F'M - FM.$$

L' eguaglianza degli angoli FMH e F'MH, ovvero RMN, resulta ancora da questa costruzione.

Fig.54. 3.° Allorchè il punto M è sopra una parabola, *fig.* 54, non v'è che un sol raggio vettore; ma l'altro è rimpiazzato dalla retta QM paralella all'asse IB, ed il punto Q tien luogo del punto G, poichè $QM = FM$. Considerando in seguito un punto N posto avanti o dopo in contatto, si ha nel medesimo tempo QN e $FN > ON$; il punto N è dunque fuor della curva.

Dalla costruzione suddivisata deducesi l'eguaglianza degli angoli FMH, QMH; e fa di mestieri osservare che l'ultimo è eguale a NME, formato dalla tangente e dalla retta ME paralella all'asse IB.

Se si applicasse il calcolo a queste costruzioni, si troverebbero i resultati ottenuti nel num.° precedente.

163. La considerazione delle tangenti dell'iperbola conduce ad una particolarità notabilissima, dalla quale resulta che quantunque il suo corso s'estende all'infinito, ciascun de' suoi rami resta nulladimeno sempre compreso trai lati d'un cert'angolo, senza poterli arrivare giammai, così come si vede nella figura 67. Questa circostanza, la quale Fig. 67. si è presentata in un'altra maniera nel n.° 118, si trova ancora osservando l'andamento della suttangente PT a misura che il punto di contatto M s'avanza sulla curva e s'allontana dal punto I, ovvero, ch'è la stessa cosa, a misura che l'ascissa OP aumenta. Denotando

OP per x, si ha (161) $PT=\frac{x^2-a^2}{x}$; e siccome $OT=OP$ — PT, proviene

$$OT=x-\frac{x^2-a^2}{x}=\frac{a^2}{x}.$$

Si vede evidentemente da tal resultato che più x aumenta, più OT diminuisce e più il punto T s'avvicina al punto O, al quale frattanto esso non può giammai giungere, poichè una frazione non può mai divenire assolutamente nulla fintantochè il suo numeratore non si distrugge; il punto O dee dunque essere riguardato come il limite, verso del quale il punto T tende quando mai mediante il progresso dell'ascissa. Bisogna esaminare adesso i cangiamenti, che prova nelle medesime circostanze l'angolo MTP, il quale determina la situazione della tangente per rapporto all'asse delle ascisse. La tangente trigonometrica di quest'angolo ha per l'espressione

$$\frac{MP}{PT}=\frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}\ (30);$$

e prendendo la forma $\dfrac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$ allorchè si dividono i suoi due termini per x, essa tende necessariamente verso la quantità $\frac{b}{a}$ a misura che la frazione $\frac{a^2}{x^2}$ diminuisce, ovvero a mi-

sura che x aumenta; l'angolo MTP non può dunque diminuire indefinitamente; ed il limite, a cui esso non può mai arrivare, ma al quale esso si approssima quanto mai, è l'angolo EOI, la cui tangente trigonometrica è $\frac{b}{a}$; l'iperbola non può dunque arrivar mai a toccare la linea EO, per quanto prolungate si suppongano entrambe.

Affine di costruire l'angolo EOI, fa di mestieri prender sull'asse II' un'ascissa a piacere, il semi-asse OI per esempio; ed il triangolo rettangolo EOI dando EI = OI tang EOI, avremo

$$\text{EI} = \text{OI} \times \frac{b}{a} = b,$$

poichè OI $= a$. Inalzando dunque nel punto I la perpendicolare EI $= b$, la retta OE, la quale unirà i punti O ed E, sarà il limite di tutte le tangenti del ramo IK dell'iperbola: io ho digià detto che questo limite si chiama *asintoto*. Egli è manifesto che n'esiste un secondo Oe posto al disotto dell'asse II', faciente con quest'asse il medesimo angolo che il primo, e che serve di limite alle tangenti del secondo ramo Ik.

164. Non sarà inutile di far vedere come si passi dall'equazion dell'iperbola relativa ai suoi assi a quella, che ha luogo per rapporto agli asintoti. Per questo, si conduca pel punto M, parallelamente all'asintoto Oe, una nuova ordinata QM, e si faccia QO $= t$, QM $= u$; l'angolo EOI compreso tra l'asse delle t, QO, e quello delle x, II', avrà evidentemente per coseno $\frac{\text{OI}}{\text{OE}}$, per seno $\frac{\text{IE}}{\text{OE}}$, e siccome

$$\text{OI} = a,\ \text{IE} = b,\ \text{OE} = \sqrt{\overline{\text{OI}}^2 + \overline{\text{IE}}^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

ne resulterà (122)

$$m = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad n = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Considerando in seguito l'asse della u, Oe, troveremo

$$\cos e\text{OI} = \frac{\text{OI}}{\text{O}e}, \qquad \text{sen}\ e\text{OI} = \frac{\text{I}e}{\text{O}e};$$

e siccome Oe=OE, Ie=—IE, conseguiremo

$$p=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad q=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

e, per le formule generali

$$x=mt+pu,\qquad y=nt+qu,$$

otterremo

$$x=\frac{a(t+u)}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad y=\frac{b(t-u)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

dessa si cangerà, dopo le riduzioni, in

$$\frac{4tu}{a^2+b^2}=1,\quad\text{ovvero}\quad tu=\frac{1}{4}\,(a^2+b^2).$$

Quest'ultima equazione, simile alla trasformata della pagina 156, pone in tutta evidenza la proprietà, di cui godon gli asintoti; poichè se ne ricava

$$u=\frac{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}{t}\quad\text{ovvero}\quad QM=\frac{\frac{1}{4}\overline{OE}^2}{QO};$$

il che dimostra che l'ordinata QM va sempre diminuendo a misura che il punto Q s'allontana dal punto O, ma che essa non può mai divenir nulla

Allorchè l'iperbola proposta è equilatera (128) $b=a$; la tangente dell'angolo EOI, espressa da $\frac{b}{a}$, riducesi allora a 1; ciascun asintoto fa in conseguenza coll'asse II' un angolo eguale a 0°, 5, ed i due assi comprendon tra loro un angolo retto. L'equazione $tu=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ divenendo $tu=\frac{1}{2}a^2$, fa veder che il prodotto delle coordinate t ed u è allora eguale alla metà del quadrato del semi-asse traverso OI.

È a proposito l'osservare che, se si conducano pel punto I le rette ID ed Id, respettivamente parallele ad

Oe e ad OE, formeremo un *rombo*, di cui i lati ID e I*d* saranno, per rapporto agli asintoti, le coordinate del punto I situato sull' asse; avremo in conseguenza

$$\overline{ID} \times \overline{Id} = \overline{ID}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2),$$

di dove ricaveremo

$$ID = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

ed in generale

$$QO \times QM = \overline{ID}^2.$$

Nel caso dell' iperbola equilatera il rombo D*d* diviene un quadrato; poichè l'angolo DO*d* è retto.

Il quadrato $\overline{ID}^2$, equivalente al quadrato della somma dei semi-assi dell' iperbola, è ciò, che gli antichi Geometri denotavano sotto il nome di *potenza* dell' iperbola.

165. Egli è manifesto che, se si prolunghino le linee MP e PM', ordinate relative all' asse II', fino all' incontro degli asintoti OE ed O*e*, le parti MR e M'R' di queste ordinate intercette tra ciascun ramo della curva ed il suo asintoto sono eguali tra loro: la medesima proprietà ha luogo rispetto a una retta qualunqne condotta per qualsisia punto dell' iperbola, se si tiri, per esempio, MN, avremo GM=G'N', qualunque sia la posizione, che abbia MN'. Affin di convincersene, comincerò ad osservare che

$$PR = PR' = \frac{bx}{a},$$

$$MR = PR - PM = \frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2}),$$

$$MR' = PR' + PM = \frac{b}{a}(x + \sqrt{x^2 - a^2}),$$

$$MR + MR' = b^2$$

Condurremo in seguito pel punto N' la retta SS' paralella a MM'; i triangoli simili RMG, SN'G daranno

$$GM : GN' :: MR : N'S,$$

i triangoli simili G' N' S' e R'MG' daranno

$$G'M : G'N' :: MR' : N'S';$$

moltiplicando queste due proporzioni per ordine, conseguiremo

$$GM \times G'M : GN' \times G'N' :: MR \times MR' : N'S \times N'S';$$

e siccome in virtù di ciò, che precede, si ha

$$MR \times MR' = b^2, \qquad N'S \times N'S' = b^2,$$

ne concluderemo

$$GM \times G'M = GN' \times G'N' :$$

ponendo in luogo di G'M e di GN' i loro valori G'N'+MN', GM + MN', e facendo le riduzioni, le quali si presentano dopo le moltiplicazioni indicate, avrem finalmente

$$GM \times MN' = G'N' \times MN' \text{ ovvero } GM = G'N'.$$

166. Col soccorso della proprietà, ch'è stata dimostrata, si descrive assai semplicemente l'iperbola per punti allorchè si hanno gli asintoti ed un sol punto M. Si tira da questo punto un gran numero di rette, come MN'; si prende la porzione GM compresa tra il punto M e l'asintoto, che n'è il più vicino, per portarla da G' in N'; e ciò dà un nuovo punto N' della curva cercata.

Quando s'hanno gli asintoti si trova la direzione dell'asse II' dividendo in due parti eguali l'angolo, ch'essi formano; e siccome la tangente dell'angolo EOI dà il rapporto dei semi-assi a e b (163), egli è facile determinar queste quantità allorchè si conosca un punto sol dell'iperbola.

L'equazione $\overline{PM}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\overline{OP}^2 - a^2)$ dà immediatamente

$a^2 = \frac{A^2 \times \overline{OP}^2 - \overline{PM}^2}{A^2}$, rappresentando per A la quantità $\frac{b}{a}$.

167. Oltre l'iperbola, di cui i rami sono KIk e K'I'k', le linee OS ed OS' comprendono pure un altra iperbola HLh, H'L'h' descritta negli altri due angoli, che formano queste rette, di manierachè l'asse trasverso II' della prima è il secondo asse della seconda, la quale ha per asse trasverso LL' secondo asse della prima. La relazione, che hanno tra loro queste due curve, le ha fatte chiamare *iperbole*

coniugate: desse hanno la medesima *potenza*, e conseguentemente la loro equazione è la stessa a riguardo degli asintoti: solamente l'angolo di queste linee, ovvero delle coordinate, differisce dall' una all' altra.

168. Abbiam veduto dalla forma dell' equazione del circolo che bisognavan tre punti per determinarlo: la medesima considerazione s' applica ad una curva qualunque; ed è manifesto che debbon essere in generale tanti punti quanti *coefficienti necessari* contien l' equazione della curva richiesta. L' equazione

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = F,$$

la quale appartiene alle curve di secondo grado in generale, essendo posta sotto la forma

$$y^2 + bxy + cx^2 + dy + ex = f,$$

non contieu altro che cinque coefficienti b, c, d, e ed f; bisogneranno dunque cinque punti per particolarizzare la curva di secondo grado da essa rappresentata. Infatti, se le coordinate di questi punti son respettivamente

$$\begin{matrix}\alpha \\ \varsigma\end{matrix} \quad \left.\begin{matrix}\alpha' \\ \varsigma'\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\alpha'' \\ \varsigma''\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\alpha''' \\ \varsigma'''\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\alpha'''' \\ \varsigma''''\end{matrix}\right\},$$

formeremo le cinque cquazioni seguenti

$$\begin{array}{llllll}
\varsigma^2 & + b\alpha\varsigma & + c\alpha^2 & + d\varsigma & + e\alpha & = f, \\
\varsigma'^2 & + b\alpha'\varsigma' & + c\alpha'^2 & + d\varsigma' & + e\alpha' & = f, \\
\varsigma''^2 & + b\alpha''\varsigma'' & + c\alpha''^2 & + d\varsigma'' & + e\alpha'' & = f, \\
\varsigma'''^2 & + b\alpha'''\varsigma''' & + c\alpha'''^2 & + d\varsigma''' & + e\alpha''' & = f, \\
\varsigma''''^2 & + b\alpha''''\varsigma'''' & + c\alpha''''^2 & + d\varsigma'''' & + e\alpha'''' & = f.
\end{array}$$

Non avendo altro fine che di dimostrar la possibilità della determinazion delle lettere b, c, d, e, f, ed il numero di *condizioni*, ch' essa esige, io non mi tratterrò ad effettuare i calcoli, che porterebbe seco quest' operazione, pei quali si può consultare l' opera del Sig. *Puissant*, citata alla pag. 141, e vi troveremo sopra questo soggetto e sulle sue applicazioni le particolarità le più importanti; mi limiterò a far osservare che queste equazioni posson divenire contraddittorie tra loro in certi casi particolari. Se succedesse, per esempio, che tre de' punti dati fossero in linea retta, non sarebbe possibile di far passare una curva di secondo grado

per questi punti; poichè nessuna curva di questo grado non può aver più di due punti comuni con una medesima retta (157).

Si concepisce che quando la curva è data di *specie* e di *posizione* son necessarie meno condizioni per determinarla. Per esempio, affin di terminare di particolarizzare un'ellisse, il cui centro, e il grand'asse son dati di *posizione*, non si ha bisogno che di due punti; poichè si può allora prendere questo centro per l'origine delle coordinate, e questo grand'asse per quello delle ascisse; e l'equazione $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, relativa a questo caso, non contiene che due coefficienti a e b, i quali si determinano col mezzo dell'equazioni

$$a^2c^2 + b^2\alpha^2 = a^2b^2,$$
$$a^2c'^2 + b^2\alpha'^2 = a^2b^2.$$

169. Io ho dimostrato, pel n.° 73, che l'equazione di secondo grado si costruiva col mezzo d'una circonferenza di circolo e d'una retta; e nel n.° 105 che le due *radici* erano date dalle due intersezioni, che posson avere tra loro queste linee; di manierachè si considererebbe l'equazione proposta come resultante dall'eliminazion d'un'incognita tra due equazioni a due indeterminate, l'una appartenente alla retta e l'altra al circolo; se si generalizza questo punto di vista, avremo il mezzo di costruire equazioni d'un grado qualunque.

Infatti, se s'abbia, per esempio, l'equazione

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0,$$

la quale può rasppresentare qualunque equazione di quarto grado, da cui s'è fatto sparire il secondo termine, egli è permesso supporla prodotta dall'eliminazione d'un'incognita y tra due equazioni di secondo grado contenenti nel tempo medesimo x ed y, e appartenenti in conseguenza a due curve. Trovar queste equazioni è un problema *indeterminato*; poichè v'è una infinità di sistemi d'equazioni, i quali posson condurre alla proposta. Se ne prende dunque una arbitrariamente. Sia $x^2 = py$; avremo

$$x^4 = p^2y^2;$$

e sostituendo nell'equazion proposta, conseguiremo

$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0\ ,$$

ovvero

$$y^2 - \frac{b^2}{p}y + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{d^4}{p^2} = 0.$$

Egli è facil di riconoscere che quest'equazione appartiene ad una parabola (128); e per porla sotto la forma la più semplice, è duopo far disparire il termine moltiplicato per y; ciò, che si effettuirà prendendo $y = y' + \frac{b^2}{2p}$.

Avremo, dopo la sostituzione,

$$y'^2 + \frac{c^3}{p^2}x - \frac{b^4 + 4d^4}{4p^2} = 0\ ;$$

questo resultato, il quale può scriversi così

$$y'^2 = \frac{c^3}{p^2}\left\{\frac{b^4 + 4d^4}{4c^3} - x\right\},$$

fa vedere che la parabola, cui esso appartiene, ha per parametro la quantità $\frac{c^3}{p^2}$, e che le ascisse contate a partir dal vertice sono eguali alla differenza tra la quantità $\frac{b^4+4d^4}{4c^3}$, e le ordinate della prima parabola, nella quale $x^2 = py$. Infatti, se si porti perpendicolarmente all' asse AB dell'a-
Fig.68. scisse, *fig.* 68 e dal lato delle ordinate positive una distanza $AA' = \frac{b^2}{2p}$, la retta A'B', condotta parallelamente ad AB, sarà l'asse, a partir dal quale si debbon prender le y'. Il vertice della parabola, di cui y' denota l'ordinata, corrispondendo al punto ove si ha $y' = 0$, il che succede quando $x = \frac{b^4+4d^4}{4c^3}$, bisognerà fare $AD = \frac{b^4 + 4d^4}{4c^3}$; ed avendo inalzata DI ad angolo retto sopra AB, ed il punto I sarà il vertice della seconda parabola GIH; A'I ne sarà l'asse; e conoscendo il suo parametro, non vi sarà cosa più

facile che di costruirla per punti seguendo il metodo del num.° 135. Quanto alla prima parabola EAF data dell'equazione $x^2=py$, egli è manifesto ch'essa ha il suo vertice nell'origine A delle coordinate, e per asse quello delle y, AC. Allorchè dessa sarà costrutta, i punti M, M', M'', M''', ove la medesima incontrerà la parabola GIH, avranno delle ascisse eguali alle *radici* dell' equazione proposta; poichè per questi punti i valori di x soddisfano nel medesimo tempo alle due equazioni

$$x^2 = py,$$

$$p^2y^2 - b^2py + c^3x - d^4 = 0,$$

dalle quali resulta la proposta.

La quantità p introdotta dall' equazione della prima parabola restando *indeterminata*, può, per render semplice la costruzione, ricever qualunque valore, che le vorremo assegnare, eccettuato lo *zero*.

Affin di rappresentare il caso più generale, ho disposto l'equazione proposta e la *figura* in modo che le due curve s'incontrassero in quattro punti; ma questa circostanza non avrà luogo che fintantochè l'equazion proposta avrà le sue quattro radici *reali*. Se, per esempio, l'asse A'I della parabola GIH cadesse al disotto di AB, ciò che succederebbe se il termine b^2py avesse il segno $+$, poichè bisognerebbe fare allora $y=y'-\frac{b^2}{2p}$, non vi sarebbero che due intersezioni al più; poichè egli è ben chiaro che il ramo IH non potrebbe più incontrar la parabola EAF: in certi casi ancora la curva GIH si troverà tutta intera al disotto di EAF; ed allora le radici della proposta saranno tutte *immaginarie*.

Del rimanente si vede da questa costruzione, come dalla teorica dell'equazioni, che l' equazione di quarto grado non può avere che un numero pari di radici *reali*; poichè le due parabole EAF e GIH non posson tagliarsi che in due o in quattro punti.

170. Segue pure da ciò che il circolo e la linea retta non incontrandosi in più di due punti, non posson risolvere che problemi suscettibili d'esser ridotti ad equazioni di secondo grado, e non potrebbero in conseguenza bastare per quelli, i quali passano questo grado, tali come

i problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, sì famosi presso l'Antichità.

Pel primo si tratta di trovare il lato d'un cubo, il volume del quale sia doppio di quello d'un altro cubo dato. Se a è il lato di quest'ultimo e x il lato dell'altro, avremo quest'equazione

$$x^3 = 2a^3 \text{ ovvero } x^3 - 2a^3 = 0.$$

Per paragonarla alla proposta, è necessario ridurla al quarto grado; il che si farà moltiplicandola per x; ed avremo

$$x^4 - 2a^3x = 0;$$

paragonandola con $x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0$; conseguiremo

$$b = 0, \quad c^3 = -2a^3, \quad d = 0.$$

L'equazioni delle parabole da costruire saranno in conseguenza $x^2 = py$, $y^2 = \frac{2a^3}{p^2}x$; e, se si prenda $p = a$, esse diverranno

$$x^2 = ay, \quad y^2 - 2ax;$$

la seconda curva avrà un parametro doppio di quel della prima. Queste curve passeranno ambedue per l'origi-
Fig. 69. ne A *fig.* 69; poichè avremo $x = 0$, $y = 0$ nell'una, e nell'altra al medesimo tempo: desse si taglieranno, e quest'intersezione darà $x = 0$; radice, la quale proviene dal fattore introdottosi per inalzare al quarto grado l'equazione da costruirsi. La *figura* dimostra che non si può avere inoltre che una sola radice *reale* AP; ed infatti abbiamo veduto negli *Elementi d'Algebra* che l'equazione $x^3 - 2a^3 = 0$ non ne ha davvantaggio.

171. Il problema della trisezione dell'angolo ha per oggetto di dividere un angolo, ovvero un arco in tre parti eguali; il che s'effettuerebbe facilmente se conoscendo la corda o il seno d'un arco si ottenesse la corda o il seno del suo terzo. Questo problema non è che un caso particolare della teorica della moltisezione degli angoli, che io non posso qui esporre, ma di cui ne troveremo le basi nell'introduzione al *Trattato del calcolo differenziale e del calcolo integrale*; il problema suddetto ponesi in equazione col mezzo delle formule del n.° 11, le quali danno

$$\cos 3A = \frac{4\cos A^3 - 3R^2\cos A}{R^2}.$$

Se si riguardi cos 3A come dato, e si prenda cos A per l'incognita, avremo, facendo $\cos 3A = a$ e $\cos A = x$, questa equazione

$$x^3 - \frac{3}{4} R^2 x - \frac{1}{4} R^2 a = 0,$$

la quale essendo moltiplicata per x e paragonata coll'equazione

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0$$

darà

$$b^2 = \frac{3}{4} R^2, \ c^3 = -\frac{1}{4} R^2 a, \ d^4 = 0.$$

Avremo ancor qui un'intersezione nel punto A corrispondente alla radice $x = 0$; ed i tre altri punti d'intersezione daranno le tre radici dell'equazione

$$x^3 - \frac{3}{4} R^2 x - \frac{1}{4} R^2 a = 0.$$

Sembra a prima vista che non dovrebbesi avere che una sola radice *reale*, e che non v'è che una sola maniera di dividere un arco in tre parti eguali; ma riflettendoci con un poco d'attenzione riconosceremo che vi sono tre archi, i quali debbono soddisfare al problema proposto; poichè gli archi $3A$, $2\pi + 3A$, $4\pi + 3A$, i quali hanno il medesimo coseno (23), essendo divisi per 3, somministrano i valori

$$x = \cos A, \ x = \cos\left(\frac{2}{3}\pi + A\right), \ x = \cos\left(\frac{4}{3}\pi + A\right),$$

essenzialmente diversi (*). Non se ne può avere degli altri, perchè gli archi $6\pi + 3A$, $8\pi + 3A$, ec., i quali hanno pure il medesimo coseno che A, essendo divisi per 3, conducono agli archi $2\pi + A$, $2\pi + \frac{2}{3}\pi + A$, ec., e perchè

(*) L'*equazione suddivisata cade infatti nel* caso irriducibile. (*Vedete il* Complemento degli Elementi d'Algebra).

$\cos(2\pi + A) = \cos A$, $\cos(2\pi + \frac{2}{3}\pi + A) = \cos(\frac{2}{3}\pi + A)$, ec.

172. Prima che i metodi d'approssimazione fossero arrivati al grado di perfezione, al quale essi sono stati portati oggigiorno, i Geometri s'applicavano molto alla costruzione dell'equazioni, e facevano tutti i loro sforzi per effettuarla col mezzo delle curve le più semplici, ovvero le più facili a descriversi. Così *Halley* diede un metodo per costruire l'equazioni di terzo e di quarto grado col mezzo del circolo e della parabola, e questo metodo ha qualche vantaggio su quello del n.° 169 in ciò che il circolo, il quale rimpiazza una delle parabole, si descrive con un movimento continuo: ma il pochissimo uso, che si fa adesso di tali costruzioni, mi dispensa dalle particolarità a questo riguardo; io non ne indicherò in conseguenza che il solo spirito.

Ponendo l'equazione d'una parabola sotto la forma $x^2 = my$, e l'equazione generale del circolo essendo

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \ (94),$$

se si sviluppi quest'ultima e se n'elimini y mediante il suo valore $\frac{x^2}{m}$ ricavato dalla prima, otterrem l'equazione

$$x^4 - m(2q-m)x^2 - 2m^2px - (r^2-p^2-q^2)m^2 = 0,$$

simile all'equazione da costruire

$$x^4 - b^2x^2 + c^3x - d^4 = 0,$$

ed avremo, affin di determinare le quattro quantità incognite m, p, q e r, le tre equazioni

$$b^2 = m(2q-m),$$
$$c^3 = -2m^2p,$$
$$d^4 = (r^2-p^2-q^2)m^2;$$

potremo in conseguenza disporre d'una di queste equazioni affine di render semplice i calcoli.

Se facciasi, per esempio, $m=b$, otterremo

$$q = b, \quad p = -\frac{c^3}{2b^2}, \quad r^2 = \frac{d^4}{b^2} + p^2 + q^2;$$

valori facili a costruirsi, e che daranno la posizione del centro, ed il raggio del circolo da descriversi unitamente alla parabola, che somministra l'equazione $x^2 = by$. Io non entrerò punto nella discussione dei casi, i quali potrebbero esigere un'altra scelta nel valore assegnato ad una delle due incognite, e terminerò questo Trattato coll'esposizione d'un metodo, il quale riunisce al vantaggio d'applicarsi all'equazioni d'un grado qualunque quello di dipingere i resultamenti ottenuti analiticamente col mezzo della teorica della composizione dell'equazioni.

173. Affine di fissare le idee, supporrò che l'equazione da costruire sia solamente $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$, e farò

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Poichè nei punti, ove la curva rappresentata da quest'ultima equazione incontrerà l'asse delle ascisse, avremo $y = 0$, ne segue che le ascisse di questo punto saranno le radici dell'equazione proposta; il problema sarà dunque ridotto a costruire la curva, di cui si tratta, il che è facile dopo aver resa la sua equazione omogenea restituendovi le potenze dell'unità (71). Otterremo difatti

$$y = a + \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3};$$

resultato, di cui ciascun termine costruirebbesi separatamente col mezzo delle linee proporzionali (68); ma ecco un mezzo di collegare tra loro in una maniera comoda queste differenti operazioni.

Condurremo, *fig.* 70, l'asse AB delle ascisse; per l'origine A alzarem perpendicolarmente a quest'asse la retta AC, la quale sarà l'asse delle y; ed avendo preso sulla prima le parti $AD = n$ e condotta DE parallela ad AC, porterem su quest'ultima le parti Fig. 70.

$$AF = a,\ FG = b,\ GH = c,\ HI = d;$$

tireremo in seguito IK parallela ad AB; uniremo i punti H e K con una retta, la quale taglierà in L la linea PR alzata perpendicolarmente ad AB sull'ascissa $AP = x$, condurremo ML parallela ad AB, affin di determinare sopra DE il punto M, il quale uniremo col punto G; pel punto N, ove MG incontra PR, tireremo QN parallela anch'essa ad AB; ed unendo il punto O col punto F, la retta OF darà sopra PR un punto Q tale che $PQ = y$.

Infatti si ha, pei triangoli simili IRH e H'LH,

$$\mathrm{IK}\,(n) : \mathrm{H'L}\,(x) :: \mathrm{HI}\,(d) : \mathrm{HH'} = \frac{dx}{n},$$

donde

$$\mathrm{GH'} = \mathrm{GH} + \mathrm{HH'} = c + \frac{dx}{n}.$$

Dai triangoli H'MG, G'NG resulta

$$\mathrm{H'M}\,(n) : \mathrm{G'N}\,(x) :: \mathrm{GH'}\left(c + \frac{dx}{n}\right) : \mathrm{GG'} = \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2},$$

ed in conseguenza

$$\mathrm{FG'} = \mathrm{FG} + \mathrm{GG'} = b + \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2}.$$

Finalmente dai triangoli G'OF, F'QF si conclude

$$\mathrm{G'O}\,(n) : \mathrm{F'Q}\,(x) :: \mathrm{FG'}\left(b + \frac{cx}{n} + \frac{dx^2}{n^2}\right) : \mathrm{FF'} =$$

$$\frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3};$$

ciò, che somministra per ultimo resultato

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{AF'} = \mathrm{AF} + \mathrm{FF'} = a + \frac{bx}{n} + \frac{cx^2}{n^2} + \frac{dx^3}{n^3}.$$

Estenderem senza pena questo metodo al caso, ove l'equazione proposta avesse un numero qualunque di termini; ed allorchè avremo ottenuto un numero sufficiente di punti per caratterizzar l'andamento della curva, riconoscerem facilmente di quante radici *reali* questa equazione sia suscettibile.

174. Se il corso della curva sia tale come lo rappre-
Fig. 71. sentà la linea XEGILY, *fig.* 71, dessa incontrerà cinque volte l'asse delle ascisse, ed indicherà in conseguenza che l'equazione, da cui ella deriva, ha un simil numero di radici *reali*: quest'equazione non potrà essere d'un grado inferiore al quinto. L'equazione proposta sarà

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{ec.} = 0.$$

e quella della curva da costruire

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{ec.}$$

Egli è manifesto che i valori numerici dell'ordinata y non sono altra cosa che i resultati, i quali ricavansi dall'equazione proposta dando a x i valori corrispondenti alle differenti ascisse, che si sono scelte arbitrariamente: la curva XEGILY offre dunque in qualche maniera l'equivalente della *Tavola*, nella quale questi resultati fossero scritti, ma con questo vantaggio che in virtù della legge di *continuità*, la qual si comprende meglio nelle linee che nei numeri, gli intervalli tra due sostituzioni successive si riempiono colla maggiore facilità. Avendo calcolato, per esempio, le ordinate P'P, Q'Q, R'R moltissimo prossime le une all'altre, ed unendo le loro estremità con un tratteggio continuo *senza angoli nè piegature*, s' hanno in una maniera molto precisa le ordinate intermedie.

Osserveremo 1.° che, poichè l'equazion della curva non contiene che potenze intere e *positive* di x, ciascun valore di questa indeterminata non darà per y che un sol valore, il quale sarà finito o limitato fintantochè lo sarà x, ma che y sarà suscettibile di prendere degli accrescimenti indefiniti ovvero illimitati, allorchè x ne riceverà de' tali, e che in conseguenza la curva XEGILY debb'estendersi all'infinito da ciascun lato dell'asse AC delle y.

2.° L'ispezione sola della figura fa veder che la curva XEGILY non potrebbe passare da un lato dell'asse AB all'altro senza incontrare quest'asse, ovvero analiticamente parlando, che l'ordinata y non può cangiare di segno senza prima divenir nulla (*); dal che ne segue che, *se due sostituzioni fatte nell'equazione proposta danno due resultati*

(*) *Ciò è vero in questo caso perchè l'espressione* y *è senza denominatore; ma, se si avesse* $y = \frac{a}{x}$ *la successione de' valori* $x = +1$, $x = 0$ *e* $x = -1$, *darebbe* $y = +a$, $y = \frac{a}{0}$ *ovvero infinito e* $y = -a$. *E' in questa maniera che i rami dell'iperbola considerata tra' suoi asintoti son collegati tra loro* (120).

di segno contrario, *esiste necessariamente una radice* **reale** *compresa trai valori di* x *impiegati in quelle sostituzioni.*

3.° Se si prendano sulla medesima curva due punti posti dal medesimo lato per rapporto all' asse AB, vi sarà sempre tra loro un numero pari d' intersezioni della curva, e di quest' asse. Se ne vedono infatti due tra E ed I, quattro tra E ed Y ossia tra X e L, ec.; ovvero non ve ne sarà alcuna, così come succede tra P ed I. Al contrario vi sarà certamente un numero impari d' intersezioni se i punti, che si considerano, son posti da differenti lati come lo sono X ed E, X ed I, X ed Y, ec. Da ciò resulta questa proposizione analitica. *Tra due valori di* x, *i quali per la loro sostituzion nell' equazion proposta danno due resultati del medesimo segno, non si può avere che un numero pari di radici* reali; *e n' avremo un numero impari se questi resultati sono di segni diversi.*

4.° Finalmente succede qualche volta che mediante una serie di relazioni, che possono aver tra i coefficienti a, b, c, d, e, f, ec., due intersezioni consecutive, come K e M, ravvicinandosi continuatamente, vengano a confondersi: e la parte IKLMY della curva prendendo la forma del tratteggio punteggiato IL'Y altro non fa che toccare l' asse AB; allora le due radici rappresentate da AK ed AM divengono eguali tra loro ed all' ascissa AL'. Vedesi facilmente che, se l' equazione proposta non avesse altre radici *reali*, la curva, che ne deriva, non taglierebbe il suo asse in nessuna parte, e che non si potrebbe per conseguenza far cangiare di segno il primo membro di questa equazione in virtù d' alcuna sostituzione. Non accaderebbe lo stesso nel caso ove tre intersezioni si riunissero insieme; la curva taglierebbe almeno una volta l'asse tanto prima quanto dopo; e per convincersene, bisogna vedere ciò, che resterebbe di questa curva se i tre punti H, K e M, ovvero F, H e K venissero a confondersi in uno solo. Seguendo queste considerazioni riconosceremo che, per la riunione d' un numero pari d' intersezioni, la curva derivata dall' equazione proposta può trovarsi tutta intera da un medesimo lato dell' asse, ma che questa circostanza non ha mai luogo allorchè il numero delle intersezioni, confuse in una sola, sia impari; e ne concluderemo da ciò che allorquando un' equazione non ha per radici *reali* che un numero pari di radici *eguali*, egli è impossibile di riconoscerne l'esistenza per alcuna sostituzione.

Spesso l' ispezione d' un piccol numero di punti della

curva serve per indicare lo spazio, ove dessa s'approssimi il più all'asse delle ascisse: allora, moltiplicando in questo spazio il numero de' punti determinati, s'arriva ad assicurarsi se vi sia un contatto, ovvero vi sieno delle intersezioni, e se in conseguenza l'equazione proposta abbia delle radici rigorosamente *eguali*, ovvero solamente poco differenti le une dall'altre: in questo caso la costruzion della curva serve tanto a facilitare la risoluzione numerica, quanto a schiarirne l'andamento particolare.

APPENDICE

CONTENENTE I PRIMI PRINCIPII DELL' APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLE SUPERFICIE CURVE ED ALLE CURVE DI DOPPIA CURVATURA.

Osservazione. Io credo dover prevenire i lettori poco abituati a questo genere di considerazioni ch'essi troveranno nel *Complemento degli elementi di geometria* le notizie preparatorie indispensabili per l'intelligenza di ciò, che segue.

Equazione del piano e della linea retta.

175. La maniera più comoda per istabilire la posizione d'un Fig. 72. punto qualunque M nello spazio, *fig.* 72, è quella di *proiettarlo* in primo luogo sul piano BAC, dato di posizione, abbassando su questo piano la perpendicolare MM', e di riportare in seguito la *proiezione* M' ai due assi AB ed AC, perpendicolari tra loro, col mezzo delle coordinate AP e PM'. Ciò riducesi a riportare il punto stesso ai tre piani BAC, BAD e DAC perpendicolari tra loro; poichè le coordinate AP e PM' situate nel piano BAC rappresentano le distanze MM''' e MM'' del punto proposto M dai due altri piani DAC e BAD. Le rette AB, AC, AD, seguendo le quali i piani coordinati BAC, BAD, DAC si tagliano due a due, sono gli assi delle coordinate, e si distinguono tra loro mediante la lettera, la quale denota la coordinata, che loro è parallela. Così, facendo $AP = x$, $PM' = y$, $M'M = z$, la linea AB sarà l'asse delle x, la linea AC quello delle y e la linea AD quello delle z.

I piani coordinati stessi ricevono denominazioni consimili. Il piano BAC si chiamerà il piano delle x e delle y, perchè desso contiene le coordinate x e y. La *proiezione* M'' del punto M sul piano BAD essendo riportata ai due assi AB ed AD per mezzo delle coordinate $AP=x$, $PM''=M'M=z$, questo piano sarà denotato sotto il nome

di piano delle x e delle z. Finalmente la *proiezione* M''' del punto M sul piano DAC essendo riportata agli assi AC ed AD per mezzo delle coordinate AQ = PM' = y e QM''' = M'M = z, questo piano sarà denotato sotto il nome di piano delle y e delle z.

Fa di mestieri osservare 1.° che le coordinate y e z son nulle nel tempo medesimo per tutti i punti dell'asse delle x, cioè AB; che lo stesso succede a riguardo delle x e z relativamente all'asse delle y, cioe AC, e delle x e delle y riguardo all'asse delle z, ossia AD.

2.° Che per tutti i punti del piano BAC la coordinata z è nulla, e ch'essa ha un valor costante in tutti quelli d'un piano qualunque parallelo a questo primo; di tal maniera che quest'equazione $z=c$, allorchè dessa è sola e che non si ha alcun'altra determinazione concernente le due coordinate rimanenti x e y, debb'essere riguardata come denotante tutti i punti del piano condotto parallelamente a BAC, ad una distanza eguale a c. Vedrem parimente che y e nullo per tutti i punti del piano BAD, e che l'equazione del piano, che si condurrebbe parallelamente a questo primo, ad una distanza b, sarebbe $y=b$.

Se si riuniscano insieme le due equazioni $z=c$ e $y=b$, vale a dire, se si supponga ch'esse abbian luogo nell'istesso tempo, le medesime denoteranno una retta parallela all'asse delle x e condotta pel punto del piano delle y e delle z, di cui le coordinate sono c e b; poichè egli è facil vedere che questa retta può essere riguardata come l'intersezion di due piani respettivamente paralleli ai piani BAC, BAD.

Finalmente nel piano DAC la coordinata x sarà sempre nulla, e $x=a$ sarà l'equazione del piano condotto parallelamente a questo primo ad una distanza eguale ad a. Le tre equazioni $z=c$, $y=b$, $x=a$ essendo riunite, non possono appartenere ad altro che ad un sol punto, il quale si trova nell'intersezioni di tre piani respettivamente paralleli a ciascuno de' piani coordinati.

176. Vado ad esaminare adesso cosa significherebbe una sola equazione tra due delle tre indeterminate x, y e z; e prendo, per esempio, $z=Ax$. Si vede in primo luogo (87) che quest'equazione appartiene a una retta AN'' *fig.* 73, Fig. 73.
condotta nel piano delle x e delle z, BAD; ma dessa ha ancora un senso più esteso perchè, se si concepisca che la retta AN'' si muova parallelamente a sè stessa lungo dell'asse AC delle y, in qualunque posizione ch'essa si fermi,

l'ordinata z, ovvero $M'm$ presa nel punto qualunque M' situato sulla retta PM', parallela ad AC, sarà eguale all'ordinata Pm'' corrispondente nel piano BAD all'ascissa $AP = QM'$. La retta AN'', mediante il movimento, ch'io le suppongo, descrive il piano N'' AC, il quale passa per le rette AN'' ed AC; avrem dunque $z = Ax$ per tutti i punti di questo piano.

Troverebbonsi delle conseguenze analoghe per gli altri piani coordinati prendendo dell'equazioni tra le *indeterminate*, ch'essi contengono; ma egli è meglio passare immediatamente ad un caso più generale e considerar l'equazione $z = Ax + By$.

Facendovi $y = o$, otterremo $z = Ax$, donde concluderemo che la retta AN'', la qual si trova compresa in quest' ultima equazione, contiene tutti i punti, che la superficie rappresentata dall'equazione $z = Ax + By$ ha di comune col piano coordinato BAD, sul quale y è sempre nullo, e che in conseguenza questa retta AN'' è l'intersezione di questo piano colla superficie proposta.

Allorchè vi si fa $x = o$, s'ottiene $z = By$; equazione, la quale appartiene ad una retta AN''' condotta per l'origine A nel piano DAC, e ch'è l'intersezione di questo piano colla superficie rappresentata dall'equazione $z = Ax + By$.

Se si concepisca adesso che la linea AN''' si muova parallelamente a sè stessa lungo di AN'' essa descriverà il piano N''' AN'', e quand' essa sarà arrivata in una posizione qualunque $m''M$, la porzione Mm dell'ordinata $M'M$ sarà eguale e parallela a Qm'''; avremo per conseguenza

$$M'M = Pm'' + Qm''' = Ax + By = z;$$

donde resulta che il piano M''' AN'', il quale passa per le linee AN'' ed AN''', di cui l'equazione sono

$$z = Ax, \quad z = By,$$

ha egli stesso per equazione

$$z = Ax + By.$$

Se il piano proposto, in luogo di passar per l'origine A, si trovasse in una posizione G''' EG'' determinata dalle linee EG'', EG''' respettivamente parallele ad AN'' e ad AN''', egli sarebbe parallelo a N''' AN''; e prolungando l'ordinata di quest' ultimo fino a che dessa incontrasse il primo, avrebbesi

$$M'L = M'M + ML = M'M + AE\,;$$

chiamando dunque D la distanza AE e z l'ordinata M'L, conseguirebbesi dopo ciò che precede,

$$z = Ax + By + D.$$

Tal' è l'equazione d'un piano condotto in una posizione qualunque; ed è facile di convincersi ch'essa rappresenta l'equazion generale del primo grado a tre *indeterminate*, poichè quest'ultima non può essere che della forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\,;$$

dividendola poi per γ, essa rientrerà nella prima allorchè avremo posto

$$-\frac{\alpha}{\gamma} = A,\ -\frac{\beta}{\gamma} = B,\ -\frac{\delta}{\gamma} = D.$$

Si vede dunque che il *coefficiente* γ non aggiunge nulla alla generalità dell'equazione: io lo conserverò nonostante affine di render le formule più simmetriche, e rappresenterò l'equazione d'un piano qualunque per

$$Ax + By + Cz + D = 0\,;$$

ma bisognerà rammentarsi che in tutti i risultamenti avremo una delle costanti, la quale potrem supporre eguale alla unità, ovvero determinarla per mezzo di *condizioni* particolari.

177. Facendo successivamente x, y e z nulle nell'equazione di questo piano, troveremo che il medesimo taglia quello delle y e delle z in una linea, la cui equazione è $By + Cz + D = 0$; quello delle x e delle z in una linea, la cui equazione è $Ax + Cz + D = 0$; e finalmente quello delle x e delle y in una linea avente per equazione $Ax + By + D = 0$.

L'estensione de' piani essendo indefinita, fa di mestieri concepire che il piano G'''EG'' sia prolungato dietro ai piani coordinati BAD, DAC; desso incontrerà allora il piano BAC e passerà disotto. Tutte queste circostanze possono leggersi nella sua equazione osservando che ciascun delle indeterminate x, y e z debb'esser presa *positivamente* e *negativamente*, e che, se le parti AB, AC ed AD, *fig.* 72, Fig. 72.
degli assi delle coordinate corrispondono ai valori *positivi* di

queste quantità, le parti opposte Ab, Ac ed Ad corrisponderanno ai valori *negativi*. Ciò può dimostrarsi subito mediante l'andamento delle linee situate nei piani BAC, BAD e DAC; vi s'arriverebbe pure trasportando ciascun di questi piani parallelamente a sè stesso in modo da render *positive* le ordinate *negative*, che gli son perpendicolari, e si ragionerebbe allora come l'abbiamo fatto a riguardo delle linee (76).

Segue da ciò che si può distinguere in quale degli otto angoli *trièdri*, che i piani coordinati formano intorno del punto A, cada un punto proposto, per mezzo de' segni, dai quali le sue coordinate sono affette: bisogna perciò osservare che allorquando si prenda

$+x$, $+y$, $+z$, nell'angolo ABCD, avremo
$+x$, $+y$, $-z$, nell'angolo ABCd,
$+x$, $-y$, $+z$, nell'angolo ABDc,
$-x$, $+y$, $+z$, nell'angolo ACDb,
$+x$, $-y$, $-z$, nell'angolo ABcd,
$-x$, $-y$, $+z$, nell'angolo ADbc,
$-x$, $+y$, $-z$, nell'angolo ACbd,
$-x$, $-y$, $-z$, nell'angolo Abcd.

178. Una linea retta è data ogni qualvolta si conoscon due piani, i quali la contengono, e de' quali essa è allora l'intersezione, perchè le coordinate de' suoi punti son comuni all'equazioni di questi piani. Sien dunque

$$Ax+By+Cz+D=0 \ldots\ldots (1),$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0 \ldots\ldots (2)$$

l'equazioni de' piani dati; riguardando le indeterminate x, y e z come aventi il medesimo valore in queste due equazioni, non ne resterà che una sola, la quale possa prendersi arbitrariamente, le altre due calcolate in conseguenza della prima, faranno conoscere la posizione de' differenti punti della retta proposta.

L'equazioni (1) e (2) non sono le sole, le quali possono rappresentar la retta proposta; poichè la medesima si trova in un' infinità di piani diversi; ma si scelgono ordinariamente fra tutte l'equazioni, ch'essa potrebbe avere, quelle, le quali non contengon che due delle coordinate x, y e z.

Eliminando successivamente x, y e z tra l'equazioni (1) e (2), otterremo le tre seguenti

$$(AB'-A'B)y-(CA'-C'A)z+AD'-A'D=0\,,$$
$$(BC'-B'C)z-(AB'-A'B)x+BD'-B'D=0\,,$$
$$(CA'-C'A)x-(BC'-B'C)y+CD'-C'D=0\,,$$

le quali diverranno

$$\gamma y-\beta z+\delta=0 \ldots\ldots (3),$$
$$\alpha z-\gamma x+\varepsilon=0 \ldots\ldots (4),$$
$$\beta x-\alpha y+\xi=0 \ldots\ldots (5),$$

facendo, per abbreviare,

$$AB'-A'B=\gamma\,,\ CA'-C'A=\beta\,,\ BC'-B'C=\alpha\,,$$
$$AD'-A'D=\delta\,,\ BD'-B'D=\varepsilon\,,\ CD'-C'D=\xi\,,$$

Due qualunque di queste equazioni servono per rimpiazzare l' equazioni (1) e (2), e comprendono implicitamente la terza. Infatti, se si moltiplichi l' equazione (3) per α, l'equazione (4) per β, l' equazione 5 per γ e si sommino i prodotti, troveremo

$$\alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\xi=0\,;$$

resultato, che la sostituzione de' valori di α, β, γ, δ, ε e ξ renderà *identico*, ovvero ch' esprimerà la *condizione*, alla quale debbono soddisfare queste quantità affinchè l' equazioni (3), (4) e (5) essendo date *a priori* possano appartenere alla medesima linea retta.

L' equazione (3), la quale contiene la relazione, che debbono avere tra loro le coordinate y e z per tutti i punti della retta proposta, appartiene al complesso delle *proiezioni* di questi punti sul piano delle y e delle z, ed è in conseguenza l'equazion della *proiezione* della retta proposta su questo piano (*Compl. degli Elementi di Geom. n.*° 4). Vedrem parimente che l' equazione (4) appartiene alla *proiezione* di questa retta sul piano delle x e delle z, e che l'equazione (5) è quella della sua *proiezione* sul piano delle x e delle y. Due qualunque di queste *proiezioni* essendo date, la retta è interamente determinata: ciò si fa manifesto dall'analisi precedente, e perchè la retta proposta altro non è che l' intersezione di due qualunque de'piani *proiettanti* (*Compl.* 5), piani di cui l' equazione è la medesima che quella della *proiezione*, sulla quale dessi son inalzati (176).

179. L' equazion generale del piano non contenendo che tre *costanti* necessarie, egli è bastante un egual numero di *condizioni* per renderla particolare. Io indicherò successivamente quelle di queste *condizioni*, le quali s'incontrano il più frequentemente, e tratterò nel tempo medesimo i problemi analoghi relativamente alle linee rette.

Allorchè bisogna far passare un piano per tre punti, di cui le coordinate sono

$$x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''',$$

si pone successivamente

$$\begin{aligned} &x', x'', x''' \text{ in luogo di } x, \\ &y', y'', y''' \text{ in luogo di } y, \\ &z', z'', z''' \text{ in luogo di } z \end{aligned}$$

nell'equazion generale del piano

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

e s' ottengono le tre equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} Ax'+By'+Cz'+D&=0, \\ Ax''+By''+Cz''+D&=0, \\ Ax'''+By'''+Cz'''+D&=0, \end{aligned}$$

col mezzo delle quali si determinano le quantità $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$,

e si trova

$$\frac{A}{D}=\frac{z'(y''-y''')-z''(y'-y''')+z'''(y'-y'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')},$$

$$\frac{B}{D}=\frac{x'(z''-z''')-x''(z'-z''')+x'''(z'-z'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')},$$

$$\frac{C}{D}=\frac{y'(x''-x''')-y''(x'-x''')+y'''(x'-x'')}{x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')}.$$

Egli è facil vedere che, se si volessero determinare l'equazioni delle *proiezioni* d'una retta, la quale passa per due punti dati, v' arriveremmo in una maniera analoga col sostituir le coordinate di questi punti nell' equazioni generali $x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$, e si troverebbe di tal maniera

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'),\ y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z')\ (88).$$

180. Per riconoscere quando due rette date sono in un medesimo piano, ovvero, ciò che riducesi allo stesso, si tagliano, fa di mestieri assicurarsi se le indeterminate x, y e z possono esser comuni alle quattro equazioni delle *proiezioni* di queste rette (*Compl.* 19) : ora egli è manifesto che eliminando x, y e z, resterà un'equazione, la quale esprimerà la *condizione*, senza la quale l'equazioni delle rette proposte non potrebbero aver luogo pel medesimo punto. Sieno

$$\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + c \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + c' \end{array}\right\}$$

l'equazioni di queste rette; ne ricaveremo immediatamente

$$az + \alpha = a'z + \alpha', \qquad bz + c = b'z + c'.$$

ed eliminando z, otterremo

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) - (c' - c)(a' - a) = 0.$$

181. Due piani, i quali son paralleli, hanno le loro sezioni comuni con ciascun piano coordinato respettivamente parallele tra loro (*Compl.* 15) : ma, se

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

rappresentano l'equazioni di questi due piani, le loro comuni sezioni respettive coi piani delle x e delle z e delle y e delle z avranno per equazioni

$$\begin{array}{ll} Ax + Cz + D = 0, & A'x + C'z + D' = 0, \\ By + Cz + D = 0, & B'y + C'z + D' = 0, \end{array}$$

e non saran parallele due a due che allorquando avremo

$$\frac{A}{C} = \frac{A'}{C'} \quad , \quad \frac{B}{C} = \frac{B'}{C'}\ (89).$$

Ricavando da queste ultime i valori di A' e di B' otterremo per l'equazione del piano parallelo al primo

$$\frac{C'}{C}(Ax + By + Cz) + D' = 0.$$

Resta D' da determinarsi in questo resultato; ora, supponendo che il piano cercato debba passar per un punto, di cui le coordinate sieno x', y' e z', avremo

$$\frac{C'}{C}(Ax' + By' + Cz') + D' = o;$$

togliendo quest'equazion dalla precedente, D' sparirà; e dividendo allora per $\frac{C'}{C}$, conseguiremo

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = o.$$

Egli a proposito d'osservare che riguardando A, B, C come quantità qualunque, l'equazione suddivisata sarà comune a tutti i piani, i quali passano pel punto proposto.

Poichè due rette son parallele allorchè le loro *proiezioni* su ciascuno de' piani coordinati son respettivamente parallele (*Compl.* 20), le loro equazioni saranno, in questo caso, della forma

$$\left.\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + \epsilon \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x = az + \alpha' \\ y = bz + \epsilon' \end{matrix}\right\}.$$

Se la seconda retta dee passare pel punto, di cui le coordinate sono x', y' e z', avremo, per determinare α e ϵ', l'equazioni

$$x' = az' + \alpha', \text{ e } y' = bz' + \epsilon',$$

dalle quali ricaveremo, operando al solito,

$$x - x' = a(z - z'), \qquad y - y' = b(z - z').$$

182. Per trovar l'equazione d'un piano perpendicolare a una retta data, bisogna rammentarsi che le comuni sezioni di questo piano con ciascuno de' piani coordinati son perpendicolari alle *proiezioni* della retta data (*Compl.* 32). Sieno

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \epsilon$$

l'equazioni di questa retta, e

$$Ax + By + Cz + D = o$$

quella del piano cercato: le comuni sezioni di quest'ultimo

sui piani delle x e delle z e delle y e delle z saranno rappresentate da

$$Ax+Cz+D=0\text{, ovvero } x=-\frac{Cz}{A}-\frac{D}{A},$$

$$By+Cz+D=0\text{, ovvero } y=-\frac{Cz}{B}-\frac{D}{B};$$

e perchè queste rette sieno perpendicolari alle *proiezioni* della retta data fa di mestieri che s' abbia

$$a=\frac{A}{C},\qquad b=\frac{B}{C}\ (90).$$

Sostituendo i valori di A e di B ricavati da queste equazioni in quella del piano cercato avremo

$$C(ax+by+z)+D=0\ ;$$

e se questo piano debba passar per un punto, di cui le coordinate sono x', y' e z', la sua equazione diverrà

$$a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Se l'equazione del piano fosse data, e si dimandasse quella della retta, che gli è perpendicolare, bisognerebbe allora rimpiazzare a e b coi valori qui sopra indicati; otterrebbesi

$$x-x'=\frac{A}{C}(z-z'),\qquad y-y'=\frac{B}{C}(z-z')$$

per l'equazioni della retta perpendicolare al piano rappresentato da $Ax+By+Cz+D=0$, ed obbligata a passare pel punto, le cui coordinate sono x', y' e z'.

183. La distanza del punto M, *fig.* 72, di cui le coordinate sono x, y e z, dall'origine A ha per espressione Fig. 72.

$$\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PM'}^2+\overline{MM'}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ (\textit{Compl. 24}).$$

Quella di due punti qualunque M e m s'ottiene prendendo $PO=pm'$, $M'N=m'm$; e considerando i triangoli $m'OM'$ e mNM, rettangoli l'uno in O, l'altro in N; ne resulta

$$\overline{m'M'}^2=\overline{m'O}^2+\overline{M'O}^2,\quad \overline{mM}^2=\overline{mN}^2+\overline{MN}^2\ ;$$

ma denotando per x', y', z', le coordinate del punto m, s' ottiene

$$m'O=x-x', \quad M'O=y-y', \quad MN=z-z',$$

ed osservando che $mN=m'M'$, si trova

$$mM=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

184. Ciò conduce all' equazion della sfera, poichè tutti i punti della sua superficie debbon essere egualmente lontani dal suo centro; se si supponga in primo luogo che il medesimo sia all' origine e che il raggio sia r, avremo in tutti questi punti

$$x^2+y^2+z^2=r^2;$$

e, se le coordinate del centro sono x', y', z', conseguiremo

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=r^2.$$

185. Ciò, che precede, fa trovare in una maniera semplicissima l' espressione del coseno dell' angolo compreso tra due rette date. Sieno

$$\left.\begin{aligned} x-x'&=a(z-z') \\ y-y'&=b(z-z') \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x-x'&=a'(z-z') \\ y-y'&=b'(z-z') \end{aligned}\right\}$$

l' equazioni delle *proiezioni* di queste rette, le quali si taglian nel punto, di cui le coordinate sono x', y' e z'; se s' immagini ch' esse si muovano parallelamente a sè stesse, fintantochè il loro punto d' incontro sia nell' origine, il loro angolo non cangerà, e l' equazioni suddivisate si ridurranno a

$$\left.\begin{aligned} x&=az \\ x&=bz \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x&=a'z \\ x&=b'z \end{aligned}\right\}.$$

Se concepiscasi in seguito una sfera, la quale abbia il suo centro nell' origine, e di cui il raggio sia rappresentato per r, la distanza dei punti, ove la sua superficie taglierà ciascuno de' lati dell' angolo cercato, sarà evidentemente la corda di quest' angolo. Troveremo le coordinate del punto d' incontro della prima retta colla superficie della sfera determinando x, y e z col mezzo dell' equazioni di questa retta e di quella della sfera; avremo in tal maniera

$$x=\frac{ar}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad y=\frac{br}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad z=\frac{r}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

chiamando x', y' e z' le coordinate del punto d'incontro della seconda retta colla superficie della sfera, avrem parimente

$$x'=\frac{a'r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\ y'=\frac{b'r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\ z'=\frac{r}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

L' espressione del quadrato della distanza di questo punto dal precedente sarà $(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$, e ponendovi per $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ i loro valori, troveremo, dopo le riduzioni,

$$r^2\left\{2-\frac{2(1+aa'+bb')}{\sqrt{(2+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}\right\}.$$

Ma chiamando V l' angolo cercato, la sua corda sarà

$$\sqrt{2R^2-2R\cos V}\ (13),$$

R denotando il raggio; e facendo questo raggio$=1$, avremo pel quadrato della corda $2(1-\cos V)$; poscia paragonando coll' espressione trovata qui sopra, nella quale faremo pure $r=1$, otterremo

$$\cos V=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}.$$

Sarà facile dedurre da ciò

$$\text{sen}\ V=\frac{\sqrt{(ab'-a'b)^2+(a-a')^2+(b-b')^2}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}.$$

Affinchè le due rette proposte sieno perpendicolari, bisognerà che si abbia cos $V=0$, ed in conseguenza $1+aa'+bb'=0$.

186. Egli è qui il luogo di parlar delle relazioni, le quali esistono tra gli angoli, che fa una retta qualunque con gli assi delle coordinate, perchè desse si sono introdotte in seguito con molto successo nella meccanica, e perchè le medesime danno più simmetria all' equazioni di questa retta.

Affin d' arrivarvi col mezzo dell' espressioni del n.° precedente suppongo che la seconda retta data sia uno degli assi, per esempio, quello delle x; in questo caso avremo $y=0$, qualunque sia x; così $b'=0$. Osservando in seguito

che dopo l' equazione $x = a'z$, a' denota la tangente dell' angolo, che fa coll' asse delle z (86) la *proiezione* della linea, di cui si tratta, angolo, il quale è retto quando questa linea coincide con l'asse delle x, vedremo che a' è *infinita* (24). La supposizione di $b=0$ riduce immediatamente l' espressione di cos V a

$$\frac{1+aa'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2)}};$$

e dividendo i suoi due termini per a', le daremo la forma

$$\frac{\frac{1}{a}+a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\left(\frac{1}{a'^2}+1\right)}};$$

indi, facendovi a' infinita, dessa diverrà

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Tal è l'espressione del coseno dell'angolo, che la prima retta data fa con l' asse delle x.

Troverem parimente per l' asse delle y, rapporto al quale $a'=0$ e b' è infinita,

$$\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Per l'asse delle z, rapporto al quale $a'=0$ e $b'=0$, otterremo

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Denotando respettivamente per α, β, γ, i tre angoli, dei quali ho indicati i coseni, avremo

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\quad \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Se si quadrino queste tre equazioni e si sommino, conseguiremo

$$\cos\alpha^2+\cos\zeta^2+\cos\gamma^2=\frac{a^2+b^2+1}{1+a^2+b^2}=1,$$

come lo abbiamo osservato nel n.° 59 del *Compl. degli Elem. di Geom.*

167. L' espressione di $\cos\gamma$ dando

$$\sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\cos\gamma},$$

se si sostituisca questo valore in quelli di $\cos\alpha$ e di $\cos\zeta$, ne ricaveremo

$$a=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\quad b=\frac{\cos\zeta}{\cos\gamma};$$

e l' equazioni della prima retta data diverranno

$$(x-x')\cos\gamma=(z-z')\cos\alpha,$$
$$(y-y')\cos\gamma=(z-z')\cos\zeta.$$

Se si sostituiscano i valori di a e di b nell' equazione del piano perpendicolare a questa retta, cioè in

$$a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0\ (182),$$

otterremo questo resultato simmetrico quanto mai

$$(x-x')\cos\alpha+(y-y')\cos\zeta+(z-z')\cos\gamma=0.$$

Finalmente, se si denotino per α', ζ', γ' gli angoli, che una seconda retta fa cogli assi delle coordinate, il che darà

$$a'=\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'},\quad b'=\frac{\cos\zeta'}{\cos\gamma'},$$

l' espressione, la quale denota il coseno dell' angolo, che questa seconda retta fa con la prima (185), si cangerà in

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\zeta\cos\zeta'+\cos\gamma\cos\gamma'$$

se si faccia attenzione che

$$\cos\alpha^2+\cos\zeta^2+\cos\gamma^2=1,\ \cos\alpha'^2+\cos\zeta'^2+\cos\gamma'^2=1.$$

188. L' utilità di queste formule può far desiderar d' ottenerle immediatamente; il che è facile mediante le considerazioni geometriche.

1.° Supponendo che la retta data sia trasportata parallelamente a sè stessa all'origine delle coordinate, e sia rappresentata da AM, *fig.* 74, osserveremo che il triangolo APM è rettangolo in P, poichè il piano M'PM'' è perpendicolare all' asse AB; e ne concluderemo

Fig. 74.

$$\cos \text{PAM} = \frac{\text{AP}}{\text{AM}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

ponendo per $\text{AM} = \sqrt{x^2+y+z^2}$ (183), e per x e y i loro valori az e bz.

Troverebbesi parimente

$$\cos \text{QAM} = \frac{\text{AQ}}{\text{AM}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$\cos \text{RAM} = \frac{\text{AR}}{\text{AM}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

In tal maniera arriverebbesi immediatamente con questo mezzo alla relazione

$$\overline{\cos \text{PAM}}^2 + \overline{\cos \text{QAM}}^2 + \overline{\cos \text{RAM}}^2 = 1.$$

2.° Il triangolo APM dà $\text{AP} = \text{AM} \cos \text{PAM}$; avrebbesi parimente $\text{AR} = \text{AM} \cos \text{RAM}$; e siccome $\text{AR} = \text{PM}''$, s' otterrebbe

$$\frac{\text{AP}}{\text{PM}''} = \frac{\cos \text{PAM}}{\cos \text{RAM}}, \text{ di dove } \frac{x}{z} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma},$$

rappresentando per α e γ gli angoli, che la retta AM fa coll'asse delle x e con quello delle z. Avrebbesi parimente

$$\frac{y}{z} = \frac{\cos \zeta}{\cos \gamma},$$

ζ denotando l'angolo compreso tra la retta proposta e l'asse delle y.

3.° Finalmente s' indica qualche volta una retta per l' angolo MAM', ch' essa fa colla sua *proiezione* sul piano delle x e delle y, e per l' angolo M'AP, che fa questa *proiezione* con l'asse delle x. Sia θ il primo angolo e φ il secondo; avremo

$MM' = AM$ sen MAM', ovvero $z = AM$ sen θ,
$AM' = AM$ cos MAM', ovvero $AM' = AM$ cos θ,
$PM' = AM'$ sen $M'AP$, ovvero $y = AM$ cos θ, sen φ,
$AP = AM'$ cos $M'AP$, ovvero $x = AM$ cos θ, cos φ,

Se si ravvicinino queste ultime espressioni di x, di y e di z a quelle, le qnali resultano dall' equazioni,

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\cos \text{c}}{\cos \gamma},$$

facendo attenzione che y, denotando l' angolo RAM, è il complemento di MAM', ovvero di θ, otterremo

$$\cos \gamma = \text{sen}\, \text{c}, \ \cos \theta = \cos \theta \,\text{sen}\, \varphi, \cos \alpha = \cos \theta \cos \varphi.$$

Quadrando queste ultime equazioni e sommandole, ritroverebbesi pure, come qui sopra,

$$\cos \gamma^2 + \cos \text{c}^2 + \cos \alpha^2 = 1.$$

Terminerò quest'articolo facendo osservare che tutte le dette relazioni rientrano in tante soluzioni di triangoli sferici rettangoli (58).

189. Il coseno dell' angolo, che due piani qualnnque fanno tra loro, si deduce immediatamente dal n.° 185; poichè quest'angolo è eguale a quello, che fanno due rette condotte perpendicolarmente a ciascuno dei piani proposti per un punto qualunque della loro comune sezione (*Complmento* 46) Questi piani essendo rappresentati dall' equazioni

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

se si concepisca ch' essi si muovano parallelamente a loro stessi, fino a tanto ch' essi sieno arrivati all' origine delle coordinate, il loro angolo non cangerà, e le loro equazioni si ridurranno a

$$Ax + By + Cz = 0, \ A'x + B'y + C'z = 0;$$

quelle delle rette, le quali condurremo perpendicolarmente a ciascuno di essi per questo punto, saranno (182).

$$x = \frac{A}{C} z \quad , \quad x = \frac{A'}{C'} z,$$

$$y = \frac{B}{C} z \quad , \quad y = \frac{B'}{C'} z;$$

sostituendo dunque nell'espressione di cos V, in luogo di a e b, di a' e b' i valori, che danno queste equazioni, otterremo

$$\cos V = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Se uno de' piani proposti, per esempio, il secondo, fosse quello delle x e delle y, pel quale si ha sempre $z=0$, egli è manifesto che A' e B' diverrebbero nulle in questa supposizione, e che cos V ridurrebbesi a

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Troverem parimente che il coseno dell' angolo formato dal primo piano proposto con quello delle x e delle z, pel quale si ha $y=0$, $A'=0$ e $C'=0$, sarà

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

e che il coseno dell'angolo del medesimo piano con quello delle y e delle z, pel quale si ha $x=0$, $B'=0$, $C'=0$, sarà

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Nel caso, ove i due piani proposti fossero perpendicolari tra loro, avrebbesi cos V=o, ed in conseguenza $AA'+BB'+CC'=0$.

DELLE SUPERFICIE DI SECONDO GRADO.

190. Le superficie, nello stesso modo che le linee, si dividono in ordini seguendo il grado delle loro equazioni. Il piano è la superficie di prim'ordine, perchè la sua equazione non ascende che al primo grado. Le superficie di second' ordine son tutte comprese nell' equazione

$$\left.\begin{matrix} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz \end{matrix}\right\} = L;$$

la più generale, che mai si possa formare nel secondo grado colle tre indeterminate x, y e z.

Risolvendo questa equazione, rapporto ad una di quelle lettere, per esempio, rapporto a z, troveremo

$$z = -\frac{Ex+Fy+K}{C} \pm$$

$$\frac{1}{C}\sqrt{\left\{ \begin{array}{l}(K^2+CL)+2(EK-CG)x+2(FK-CH)y \\ +(E^2-AC)x^2+2(EF-CD)xy+(F^2-BC)y^2\end{array} \right\}}$$

Questo resultato fa vedere che al medesimo punto del piano delle x e delle y corrispondon due punti sulla superficie proposta, e che in conseguenza ciascun de' valori di z produce, mediante la sostituzione di tutti i valori possibili di x e di y, una porzione di superficie, la quale è, per rapporto alla superficie totale, ciò che sono i rami d'una curva a riguardo di questa curva: si dà a queste porzioni il nome di *nappe*.

Osserveremo in primo luogo che la parte *razionale* del valore di z esprime l'ordinata d'un piano, il quale divide la superficie in due parti *simmetriche*; poichè, se si facesser partire da questo piano le coordinate della superficie ponendo

$$z+\frac{Ex+Fy+K}{C}=u,$$

l'indeterminata u avrebbe due valori eguali, l'uno *positivo* e l'altro *negativo*: il piano, di cui si tratta, è dunque a riguardo delle superficie di secondo grado, ciò, ch'è un diametro per rapporto alle curve di questo grado.

Si formerebbe difficilmente l'idea della forma, dalla quale debb'essere affetta una superficie, di cui si ha l'equazione, se non si considerassero che punti isolati; ma in luogo di questo s'immagina un'infinità di sezioni fatte in questa superficie con piani, che per maggiore semplicità si prendono paralleli ad uno de' piani coordinati; il corso di queste diverse curve essendo cognito, la loro *continuità* rende sensibile la forma della superficie proposta.

Tutti i punti d'un piano condotto parallelamente a quello delle x e delle y ad una distanza denotata per a, essendo compresi nell'equazione $z=a$, se sostituiscasi questo valore nell'equazion generale delle superficie di secondo grado, il resultato

$$\left.\begin{array}{r}Ax^2+By^2+2Dxy \\ +2(Ea+G)x+2)Fa+H)y\end{array}\right\} = L-2\,Ka-Ca^2$$

esprimerà la relazione, che hanno tra loro le coordinate del piano delle x e delle y pei punti della superficie proposta distanti da questo piano della quantità a, ed apparterrà dunque, sul piano delle x e delle y, alla *proiezion* della curva, nella quale il piano, di cui l'equazione è $z=a$, incontra la superficie di secondo grado: e siccome questo piano è parallelo a quello delle x e delle y, egli è evidente che la sezione fatta nella superficie medesima non differirà dalla sua *proiezione* sul piano, di cui si ragiona.

Prendendo per a diversi valori, avremo le diverse sezioni parallele al piano delle x e delle y; se si faccia $a=0$, l'equazione resultante

$$\left.\begin{array}{l} Ax^2 + By^2 + 2Dxy \\ + 2Gx + 2Hy \end{array}\right\} = L$$

darà la curva di secondo grado, nella quale la superficie incontra questo piano. Si determinerebbero nella maniera medesima l'equazioni delle sezioni paralelle al piano delle x e delle z ed a quello delle y e delle z.

Si concepisce facilmente, e n'abbiamo d'altronde visto l'esempio della sfera (184), che le superficie, secondo che esse son poste d'una maniera più o meno *simmetrica* per rapporto agli assi delle coordinate, hanno dell'equazioni più o meno semplici, e che in conseguenza, per analizzare le differenti specie di superficie, che può rappresentar l'equazione generale di secondo grado, fa di mestieri in primo luogo eliminarla dai termini, i quali non dipendono che dalla situazione particolare degli assi delle coordinate; il che può farsi tanto discutendo il radicale d'una maniera analoga a quella, che abbiam seguita a riguardo delle linee di secondo grado nei num.i 111 e 120, quanto costruendo delle formule generali per la trasformazione delle coordinate nello spazio, ed impiegando, come nei num.i 125 e 127, le quantità relative alla posizione degli assi onde render semplice tanto quanto è possibile la predetta equazion generale. Si può consultare per queste particolarità, le quali sconfinano interamente dagli *Elementi*, il primo volume del mio *Trattato del calcolo differenziale e del calcolo integrale.*

191. Farò osservar solamente che si può ricavare dal num.° 185 l'equazione del cono retto, posto in una situazione qualunque per rapporto ai piani coordinati.

Infatti il cono retto essendo generato dal movimento d'una retta obbligata a girare intorno d'un'altra e facendo con essa un angolo costante, se si denotino per a, c,

γ le coordinate del vertice, e si prendano per la retta fissa, ovvero per l'asse del cono, le equazioni

$$x-\alpha=a(z-\gamma)\,,$$
$$y-\epsilon=b(z-\gamma)\,,$$

per la retta mobile, ovvero pel lato del cono, l'equazioni

$$(x-\alpha)=a'(z-\gamma)\,,$$
$$(y-\epsilon)=b'(z-\gamma)\,,$$

il coseno dell' angolo di queste due rette sarà

$$\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}\,;$$

siccom'esso debb'esser costante, lo rappresenteremo per c; indi osserveremo che a e b, appartenendo all'asse del cono, denotano quantità cognite e che perciò,

$$a'=\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\,,\quad b'=\frac{y-\epsilon}{z-\gamma}.$$

Sostituendo questi valori, formerem l'equazione

$$\frac{1+a\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)+b\left(\frac{y-\epsilon}{z-\gamma}\right)}{\sqrt{\left(1+b^2+a^2\right)\left\{1+\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)^2+\left(\frac{y-\epsilon}{z-\gamma}\right)^2\right\}}}=c\,,$$

la quale riducesi facilmente a

$$\frac{a(x-\alpha)+b(y-\epsilon)+(z-\gamma)}{m\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\epsilon)^2+(z-\gamma)^2}}=c\,(*)\,,$$

(*) *Egli è agevol vedere che, se si facesse* z=o *in questa equazione, il resultato, il quale apparterrebbe alla sezione del cono fatta col piano del* x *e delle* y, *prenderebbe la forma dell'equazion generale di secondo grado a due incognite, e si potrebbe con questo mezzo provare* algebricamente *l' identità delle curve di secondo grado colle sezioni fatte in un cono retto da un piano: ma questa via sarebbe molto più complicata e men generale di quella, che abbiam seguita nei num.*[i] 125 e 156, *poichè vi abbiamo considerato*

facendo per abbreviare $\sqrt{1+a^2+b^2}=m$.

Se s ponga il vertice all' origine delle coordinate, avremo

$$\alpha=0,\ \zeta=0,\ \gamma=0,$$

e

$$\frac{ax+by+z}{m\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c.$$

Se si faccia coincidere l' asse del cono coll' asse delle z, otterremo $a=0$, $b=0$, $m=1$, poichè abbiamo su quest' asse $y=0$, $x=0$, qualunque sia z; e l' equazione suddivisata riducesi a

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c,$$

dalla quale ricavasi, per l' inalzamento al quadrato,

$$z^2(1-c^2)=c^2(x^2+y^2).$$

Facendo in questa equazione $z=n$, essa diviene

$$n^2(1-c^2)=c^2(x^2+y^2);$$

equazione, la quale appartiene ad un circolo, di cui il centro è nell' asse delle z, e di cui il raggio è $\frac{n\sqrt{1-c^2}}{c}$.

Segue da ciò che tutte le *sezioni* fatte da un piano parallelo a quello delle x e delle y nel cono proposto, son circoli; ciò che d' altronde è manifesto per la natura del cono.

Ricavasi dall' equazione di sopra

$$z=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2};$$

egli è facil vedere che $\sqrt{1-c^2}$ è il seno dell' angolo, che fa il lato del cono coll' asse delle z, e che in conseguenza

---

un cono qualunque. D' altronde il calcolo per un cono obliquo a base circolare si trova nell' Appendix de Superficiebus *posta alla fine del secondo volume dell'* Introductio in Analysin infinitorum *d'* Euler, *impresso nel* 1748.

$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ è la cotangente di quest' angolo, ovver la tangente di quello, che la medesima retta fa col piano delle x e delle, y.

Se si volesse che il vertice del cono fosse in un punto, qualunque dell'asse delle z, quest'asse coincidendo sempre con quello del cono, avrebbesi

$$z-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Facendo $z=0$, otterremo l'equazion della curva, seguendo la quale il cono incontra il piano delle x e delle y, e che si può riguardare come la base. Quest'equazione sarà

$$-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2},$$

ovvero

$$\frac{\gamma^2(1-c^2)}{c^2}=x^2+y^2;$$

dessa appartiene ad un circolo, di cui il raggio è

$$\frac{\gamma\sqrt{1-c^2}}{c}.$$

Se si rappresenti per r questo raggio, avremo

$$r^2=\frac{\gamma^2(1-c^2)}{c^2} \quad \text{e} \quad \gamma=\frac{cr}{\sqrt{1-c^2}};$$

l'equazione

$$z-\gamma=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2}$$

cangiandosi allora in

$$z-\frac{cr}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\sqrt{x^2+y^2},$$

può esser posta sotto la forma

$$z\sqrt{1-c^2}-cr=c\sqrt{x^2+y^2};$$

nel caso, ove $c=1$, essa riducesi a

$$r^2=x^2+y^2.$$

192. Quest' ultima equazione, la quale altro non contiene che due delle tre coordinate, appartiene nulladimeno alla superficie cilindrica, nella quale trasformasi il cono allorchè il suo vertice s' allontana *infinitamente*; poichè c denotando il coseno dell' angolo formato dalla retta generatrice del cono e dal suo asse, l' ipotesi $c=1$ rende quest' angolo nullo, e ristabilisce il parallelismo delle due rette, di cui si tratta: la prima girando intorno della seconda descrive dunque la superficie d' un cilindro retto perpendicolare al piano delle x e delle y, ed avente per base su questo piano il circolo, di cui il raggio è r, e di cui il centro è nell' origine delle coordinate.

Ciò conduce ad osservare che un' equazione qualunque, la qual non contiene che due delle tre coordinate, che non denota che una curva sul piano di queste coordinate, appartien nello spazio ad una superficie; poichè la coordinata, la qual non entra in quest' equazione, trovandosi indipendente dall' altre due, ha un' infinità di valori per ciascun punto del piano citato; e questi valori corrispondono a tutti i punti della retta inalzata perpendicolarmente al piano coordinato pel punto, che vi si considera.

Il complesso di tutte le rette inalzate di tal maniera su ciascun punto della curva costituisce una superficie *cilindrica*, prendendo questa denominazione in tutta l' estensione, che le abbiamo assegnata nel *Complemento degli elementi di geometria.*

DELLE CURVE CONSIDERATE NELLO SPAZIO.

193. Allorchè si ravvisan le curve nello spazio, esse resultan sempre dall' intersezione di due superficie nello stesso modo che la linea retta resulta dall' incontro di due piani (178). Si può, per esempio, indicare un circolo dando la sfera, di cui esso fa parte ed il pian, che la incontra. Supponendo che la sfera abbia il suo centro nell' origine delle coordinate e che il piano sia qualunque, il sistema dell' equazioni

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \ldots\ldots (1),$$
$$Ax+By+Cz=D \ldots\ldots (2)$$

apparterrà al circolo, seguendo il quale s'incontrano la

sfera ed il piano proposto; poichè questo sistema non converrà che a quei soli punti, i quali si trovano nel tempo medesimo sopra l' una e l'altra delle due superficie.

Egli è manifesto che si può trasformare il sistema dell'equazioni (1), (2) in un' infinità d' altri, i quali sieno equivalenti; ma il più spesso s'elimina alternativamente una delle tre indeterminate x, y ovvero z, e si ottengono tra queste quantità, combinate a due a due, tre equazioni, le quali appartengono alle *proiezioni* della curva cercata su ciascuno de' piani coordinati.

Nell'esempio suddivisato si ha

$$x^2+y^2+\left(\frac{D-Ax-By}{C}\right)^2=r^2,$$

$$x^2+z^2+\left(\frac{D-Ax-Cz}{B}\right)^2=r^2,$$

$$y^2+z^2+\left(\frac{D-By-Cz}{A}\right)^2=r^2;$$

due qualunque di queste equazioni danno la terza: desse appartengono (128) ad ellissi, le quali sono le *proiezioni* del circolo su ciascun de' piani coordinati *(Compl. 63)*.

Affine di concepir chiaramente in qual maniera una curva è rappresentata dall' equazioni delle sue *proiezioni* fa di mestieri considerare che queste equazioni appartengono a superficie cilindriche inalzate perpendicolarmente sulle *proiezioni* (192, nello stesso modo che l'equazioni delle *proiezioni* d' una retta denotan pure i suoi piani *proiettanti*.

Segue da ciò che la curva proposta resulta dall' intersezione delle superficie cilindriche inalzate sopra due sue *proiezioni (Complem. 77)*.

194. Nel maggior numero di casi l' intersezioni di due superficie curve non può avere tutti i suoi punti in un medesimo piano, e forma allora una curva *a doppia curvatura*; tal è, per esempio, l'intersezione d' una sfera e d'un cilindro retto allorchè l'asse del cilindro non passa pel centro della sfera.

Se suppongasi che la sfera abbia il suo centro nell' origine e l' asse del cilindro sia parallelo a quello delle z e che la sua base, sul piano delle x e delle y, sia un circolo, che passi per l'origine ed avente per diametro

l'asse delle x, l'equazioni delle superficie contenenti la curva proposta saranno

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
$$2ax-x^2=y^2,$$

ed avremo, per le *proiezioni* in x, y ed in x, z,

$$2ax-x^2=y^2,$$
$$2ax+z^2=r^2.$$

Il centro della sfera trovandosi sulla superficie del cilindro, la curva proposta potrebbe descriversi fissando una punta di compasso sopra questa superficie, e facendo girar l'altra sulla medesima superficie con un apertura eguale al raggio della sfera *(Complem.* 77*)*.

Per trovare tanti punti quanti vorremo, bisogna determinare le coordinate y e z col mezzo dell'ascissa x mediante l'equazioni delle *proiezioni* le quali danno

$$y=\sqrt{2ax-x^2},\quad z=\sqrt{r^2-2ax}.$$

Riconoscesi l'estensione della curva proposta assegnando i casi, nei quali queste coordinate divengono *immaginarie:* ora non si trovano valori *reali* per y che da $x=0$ sino a $x=2a$, e per z da $x=0$ sino a $x=\frac{r^2}{2a}$ dal lato *positivo*, e da $x=0$ sino all'infinito del lato *negativo;* ma egli è manifesto che non bisogna prendere che la parte dell'ascissa x comune alle due *proiezioni*, poichè bisogna che una delle coordinate divenga *immaginaria* perchè la curva sia arrivata al suo limite: dessa non s'estenderà dunque che da $x=0$ sino a $x=\frac{r^2}{2a}$.

La considerazione delle *proiezioni* stesse conforma questo resultamento. L'equazione in x e y appartenendo al cir-
Fig. 75. colo AE'F' e', *fig.* 75, il quale serve di base al cilindro, e quella, che contiene x, e z, appartenendo alla parabola H''I'h'', di cui il parametro $=2a$, ed essendo la distanza $AI'=\frac{r^2}{2a}$, egli è manifesto che non si possono impiegare nella descrizione della curva proposta che le porzioni E'Ae'

e $H''I'h''$ delle sue *proiezioni* corrispondenti sull' asse AB alla parte AI'.

195. In ultimo, per assicurarsi analiticamente che la curva proposta non è in piano, fa di mestieri cercare se dessa non può essere l' intersezione d' uno de' cilindri inalzati sulle sue *proiezioni* per qualche piano. Denotando per

$$Ax+By+Cz=D$$

l' equazione d' un piano qualunque, la sua intersezione col cilindro inalzato sulla parabola $H''I'Ih''$ sarà rappresentata dall' equazioni

$$Ax+By+Cz=D\,,$$
$$2ax+z^2=r^2\,;$$

la *proiezione* di questa intersezione avrà per equazione sul piano del y e delle z

$$A\frac{(r^2-z^2)}{2a}+By+Cz=D\,,$$

e dovrà coincidere in tutti i suoi punti con quella della curva proposta sul medesimo piano delle y e delle z, la quale è

$$y^2=r^2-z^2-\left(\frac{r^2-z^2}{2a}\right)^2;$$

ora, ricavasi dalla precedente

$$y=\frac{2aD-Ar^2-2aCz+Az^2}{2aB};$$

bisognerà dunque che per tutti i valori di z si abbia

$$\left(\frac{2aD-Ar^2-2aCz+Az^2}{2aB}\right)^2=r^2-z^2-\frac{(r^2-z^2)^2}{4a^2}.$$

Sviluppando questo resultato, gli faremo prender la forma

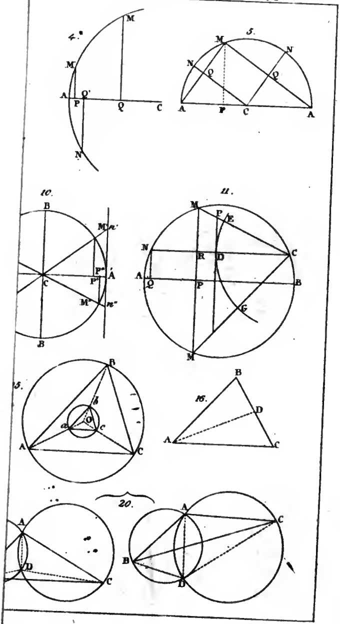
$$Pz^4+Qz^3+Rz^2+Sz+T=0\,,$$

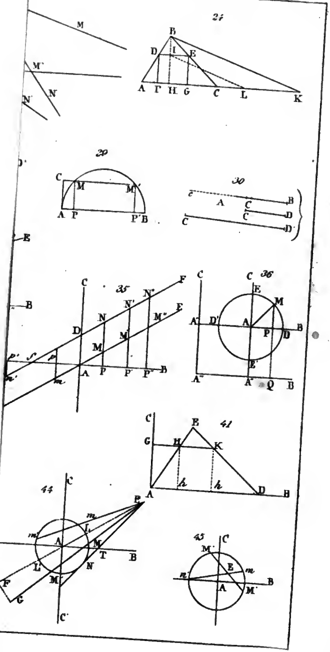
le lettere P, Q, R, S e T denotando de' *coefficienti* formati dalle quantità A, B, C, D; perchè quest' equazione sia verificata indipendentemente da z, bisognerà che s' abbia separatamente

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=0,\quad S=0,\quad T=0.$$

Ci assicureremo, mediante l'eliminazione, che ciascuna di queste cinque equazioni non rientra nell'altre, che in conseguenza non si posson determinare i quattro coefficienti A, B, C, D in maniera da soddisfare a tutte nel medesimo tempo: non v'è dunque alcun piano, il quale possa comprendere la curva proposta; e, se si volesse determinare z per mezzo dell'equazione suddivisata, non si potrebbe avere al più che quattro valori, di talmanierachè la curva proposta non può esser tagliata da un piano in più di quattro punti.

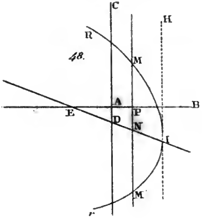
FINE.


4.
5.
10.
11.
15.
16.
20.

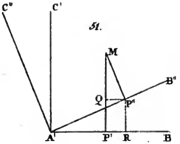


27
B
D I E
A Γ H G C L K
29
C M M'
A P P' B
30
A C B
C D
C D'
35
C F
N''
N' M'' E
N
D M'
M
A P P' P'' B
36
C C
E M
A' D' A P D B
E'
A'' A' Q B
41
C E
G H K
h h
A D B
44
C
E
m
m' L
A M
T B
L' N
F M'
G
C'
45
C
M' E m
n' A M' B

48.

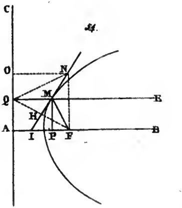


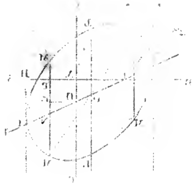
51.

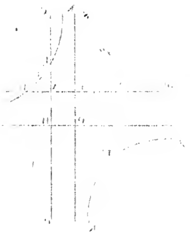




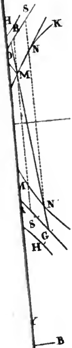
54.



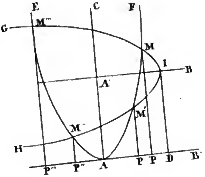




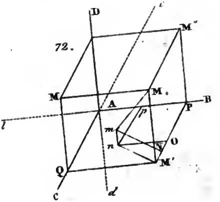



S
H
B
K
N
D
M
N
S
G
H
B

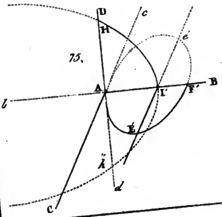
68.


E
C
F
G
M'''
M
I
B
A'
M'
M''
H
P'''
P''
A
P
P
D
B'

72.


D
c
M''
M
M
A
B
l
p
P
m
n
N
O
M'
Q
C
d

75.


D
c
H
c'
A
I'
F'
B
l
E'
h
d
C

